一个有趣的概率问题——非传递性骰子

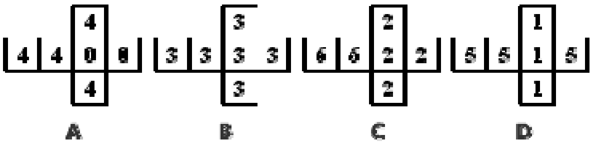
◆钱禹任

(江苏省镇江市国际学校高三理一班　212000)

众所周知,概率论的起源是对赌博问题的研究.早在 16 世纪，就有人开始研究扔硬币，掷骰子等相关问题，经过多年来许多数学家的研究，使之逐步发展成一门严谨的学科.由于本人一直对概率论的相关问题非常感兴趣，利用课余时间，看了一些概率论相关的书籍，发现了一个有趣的问题，与大家分享。

一、问题提出

问题：下边有四颗骰子（图示为正方体的展开图），分别用 A、B、C、D 来表示。庄家让你先选择一颗你自己认为最好的骰子，然后庄家再从剩下的三颗骰子中选一个。抛掷各自所选的骰子后，谁掷出的数字大，谁就赢了。那么，你应该选哪颗骰子赢面会比较大呢?



二、问题分析

从直观上看，如果只投一次每个骰子都有赢的机会，所以我们要比较的不是投一次的结果，而是甲骰子能赢乙骰子的概率，如果大于 1/2，我们就认为甲骰子比乙骰子强，那么问题就转化为是不是有一个骰子比其余三个都强呢？让我们分别来计算一下。

A 与 B：由于 B 的六个数都一样，而 A 有四个数比 B 大，所以 A 赢 B 的概率为 2/3。

A 与 C：A 想赢 C 必须 A 投出 4（概率为 2/3）的条件下 C 投出 2（概率为 2/3），A 赢 C 的概率为 4/9。

A 与 D：A 想赢 D 必须 A 投出 4（概率为 2/3）的条件下 D 投出 1（概率为 1/2），A 赢 C 的概率为 1/3。

B 与 C：由于 B 的六个数都一样，而 C 有四个数比 B 小，所以 B 赢 C 的概率为 2/3。

B 与 D：由于 B 的六个数都一样，而 D 有三个数比 B 小，所以 B 赢 D 的概率为 1/2。

C 与 D：当 C 投出 6，必然赢 D（概率为 1/3），当 C 投出 2（概率为 2/3）,此时 D 投出 1（概率为 1/2），C 才能赢，所以 C 赢 D 的概率为 2/3。

如果我们用符号“>”来表示骰子的强弱，通过上述计算，我们可以发现两个“循环”结构(A–B–C 与 A–B–C–D)：

A>B, B>C, C>A， C>D, D>A

显然，无论我们挑选哪个骰子，你会发现都有别的骰子赢面比你选的骰子大，也就是说这四个骰子中并没有一个能赢过其它三个骰子，这个游戏怎么玩先选的一方都是会输的。

曾经在一次宴会上，股神巴菲特尝试和他的朋友玩这个游戏，而这位朋友正是比尔盖茨，后者察言观色觉得股神没安好心，仔细一算相互的概率发现果然有陷阱……结局是两人相视大笑。

三、数学原理

为什么会出现这种现象，我百思不得其解.因为在数学中，比较运算是有传递性的。如果两个实数 A>B，且 B>C，那么一定有 A>C。经过与老师的交流和上网查询,发现这种现象被称为“非传递性骰子”，有点像我们经常玩的游戏“石头剪刀布”，可能会形成循环。

事实上在很多生活常识和数学概念中，传递性都是不成立的。

比如直线 a 和 b 共面，b 和 c 共面，而 a 和 c 就不一定共面；

比如直线 a 和 b 垂直，b 和 c 垂直，而 a 和 c 就不一定垂直；

比如生活中，甲认识乙，乙认识丙，甲也不一定认识丙；

上述这样的例子还有很多。

我们遇到的“非传递性骰子”现象正是一个不具有传递性的数学事实，我们只是计算了其中两个的胜负关系，用概率这一数字结果表现了出来，给人的感觉上好像有大小也就是传递关系，其实骰子 A 与 B，B 与 C 算出来的概率完全没有可比性，也就是说二者之间是有胜负关系，但是三个放在一起是没有必然的强弱关系的。

比如足球比赛也常常是这样.即使 A 队必胜 B 队,B 队必胜 C 队，也不能由此推断 A 队就能必胜 C 队，因为这里也是一样，前面两个的胜负关系与第三场 A 与 C 的胜负是没有必然关系的。

四、等价关系

经过查阅相关书籍资料，我找到了一个与传递性有关的数学概念——等价关系。

定义：设 R 是集合 A 上的一个二元关系(记作“～”)，若～满足：

自反性：$\forall a\in A,\ a\sim a$.

对称性：$\forall a,\ b\in A,\ a\sim b\ \Rightarrow b\sim a$.

传递性：$\forall a,b,c\in A,\ \ a\sim b\ ,\ \ b\sim c\ \Rightarrow a\sim c$.

则称 R 是定义在 A 上的一个等价关系。与 A 中一个元素 a 有关系的所有元素的集合叫做 a 的等价类。

比如三角形的相似关系就是一个等价关系，与某一个给定三角形相似的所有三角形就构成了一个等价类；再比如，直线的平行关系就不是一个等价关系，因为自身和自身并不平行，所以不满足自反性，等价关系是数学中的一种特殊的关系，实际上由等价关系出发，可以将集合划分成很多互不相同的等价类，完成对集合的一种划分，这也是分类思想在数学中的具体体现。

比如我们可以将整数中所有用 3 除余数相同的数看成一类，也就是说，我们将等价关系定义成只要两个整数的差能被 3 整除，它们就是等价的。这样一来，整个整数集合可以被划分成 3 类，我们称为同余类。这三类中各有一个代表元：0,1,2.比如 0 所代表的这一类，也就是能被 3 整除的所有整数，由于传递性，它们不仅都和 0 是等价的，互相也是等价的。这样一来，所有能被 3 整除的整数可以看成是“一个”元素 0。同理，1 和 2 就代表了被 3 整除余数分别为 1 和 2 的另外两类所有整数。据说高斯在研究数论的时候就用了同余类，非常著名的中国剩余定理也和这个有关。

老师告诉我，由等价关系出发，近代数学里还研究了所谓群环域等概念，也就是更加复杂抽象的数学结构了……真的是学海无涯，这也有待我以后大学生涯的求索吧。

参考文献：

[1]叶军.《如此“有序”?——从“不可递”骰子说开去》[J].初中生数学学习,2004(04).

[2]谈祥柏.《神奇的骰子》[J].初中生数学学习,1997(09).

[3]维基百科.(词条:等价关系，等价类)