小议高中数学求轨迹方程的常用技法

◆纪建侠

（陕西省洋县中学）

动点轨迹(或曲线)方程的求法解析几何的重要内容之一，同时又是高考的常考点。因此在求方程时，应根据曲线的不同背景，不同的结构特征，选用不同的思路和方法，才能迅速的解决问题。下面总结几种常见的求法。

1. 直接法

求符合某种条件的动点的轨迹方程，其实质就是利用题设中的几何条件，通过“坐标互化”将其转化为寻求变量间的关系。原则是求谁设谁，即设动点坐标为（x，y），根据已知条件及一些基本公式如两点间距离公式，点到直线的距离公式，直线的斜率公式等，直接列出动点满足的等量关系式，则可通过“建系，设点，列式，化简，检验”五个步骤直接求出动点的轨迹方程，这种“五步法”可称为直接法。

例 1. 已知线段 AB=6，直线 AM，BM 相交于 M，且它们的斜率之积是$\frac{4}{9}$，求点 M 的轨迹方程。

解：以 AB 所在直线为 x 轴，AB 垂直平分线为 y 轴建立坐标系，则 A（-3，0）B（3，0），设点 M 的坐标为（x，y），则直线 AM 的斜率 $k_{AM}=\frac{y}{x+3}(x\neq -3)$，直线 BM 的斜率 $k_{AM}=\frac{y}{x-3}(x\neq 3)$ 由已知有。$\frac{y}{x+3}\bullet\frac{y}{x-3}=\frac{4}{9}(x\neq\pm 3)$ 化简，整理得点 M 的轨迹方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1(x\neq\pm 3)$

2. 定义法

充分掌握各种特殊曲线的定义，通过图形的几何性质判断动点的轨迹是何种曲线，再求其轨迹方程，这种方法叫做定义法，运用定义法，求其轨迹，一要熟练掌握常用轨迹的定义，如线段的垂直平分线，圆、椭圆、双曲线、抛物线等，二是熟练掌握平面几何的一些性质定理。

例 2. 若$B(-8,0),C(8,0)$为ΔABC的两顶点，AC 和 AB 两边上的中线长之和是 30，则ΔABC的重心轨迹方程是______________。

解：设ΔABC的重心为 G（x，y），则由 AC 和 AB 两边上的中线长之和是 30 可得

$BG+CG=\frac{2}{3}\times 30=20$，而点$B(-8,0),C(8,0)$为定点，所以点 G 的轨迹为以 B，C 为焦点的椭圆。所以由 2a=20，c=8 可得 $a=10,b=\sqrt{a^2-c^2}=6$

故ΔABC的重心轨迹方程是$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1(y\neq 0)$

3.待定系数法

若已知曲线（动点的轨迹）的类型，求曲线（动点的轨迹）的方程时，可用待定系数法求解。

例 3.已知椭圆的对称轴为坐标轴，O 为坐标原点，F 是一个焦点，A 是一个顶点，若椭圆的长轴长是 6，且$\cos\angle OFA=\frac{2}{3}$，求椭圆的方程。

解:当焦点在 x 轴上时，设其方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

则 $a=3,\frac{c}{3}=\frac{2}{3},\therefore c=2,b^2=3^2-2^2=5$

所以，椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

当焦点在 y 轴上时，设其方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$

则$a=3,c=2,\therefore b^2=5$，所以方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

4. 相关点法（又称为坐标转换法）

转移法求曲线方程时一般有两个动点，一个是主动的，另一个是次动的，即点随点动型。

当题目中的条件同时具有以下特征时，一般可以用相关点法求其轨迹方程：

①某个动点 P 在已知方程的曲线上移动；②另一个动点 M 随 P 的变化而变化；③在变化过程中 P 和 M 满足一定的规律。

例 4. 已知 P 是以 F_1，F_2为焦点的双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$上的动点，求$\Delta F_1F_2P$的重心 G 的轨迹方程。

解：设重心 G（x，y），点 P（x_0，y_0），因为$F_1(-4,0),F_2(4,0)$

则有$\begin{cases}x=\frac{-4+4+x_0}{3}\\ y=\frac{0+0+y_0}{3}\end{cases}$，故$\begin{cases}x_0=3x\\ y_0=3y\end{cases}$代入$\frac{x_0^2}{16}-\frac{y_0^2}{9}=1$得所求轨迹方程$\frac{9x^2}{16}-y^2=1(y\neq 0)$

5. 参数法

有时求动点满足的几何条件不易寻找，也无明显的相关点，但却较易发现（或经分析可发现）这个动点的运动常常受到另一个变量（角度，斜率，比值，截距或时间等）的制约，即动点的坐标（x，y）中的 x，y 分别随另一个变量的变化而变化，我们可以设这个变量为参数，轨迹的参数方程，这种方法叫做参数法

例 5. 过点$M(-2,0)$作直线l交双曲线$x^2-y^2=1$于 A、B 两点，已知$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$。求点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线；

解：当直线l的斜率存在时，设l的方程为$y=k(x+2)(k\neq 0)$，代入方程$x^2-y^2=1$，

得$(1-k^2)x^2-4k^2x-4k^2-1=0$

因为直线l与双曲线有两个交点，所以$1-k^2\neq 0$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$$x_1+x_2=\frac{4k^2}{1-k^2},x_1x_2=\frac{4k^2+1}{k^2-1}\quad ①$$

$$y_1+y_2=k(x_1+2)+k(x_2+2)=k(x_1+x_2)+4k=\frac{k\cdot 4k^2}{1-k^2}+4k=\frac{4k}{1-k^2}$$

设 P（x，y），由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$得$(x,y)=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(\frac{4k^2}{1-k^2},\frac{4k}{1-k^2})$

$\therefore\begin{cases}x=\frac{4k^2}{1-k^2}\\ y=\frac{4k}{1-k^2}\end{cases}$ 所以 $\frac{x}{y}=k$，代入 $y=\frac{4k}{1-k^2}$ 可得 $y=\frac{\frac{4x}{y}}{1-(\frac{x}{y})^2}$，化简得$x^2-y^2+4x=0$即$(x+2)^2-y^2=4$ ②

当直线l的斜率不存在时，易求得$P(-4,0)$满足方程②，故所求轨迹方程为$(x+2)^2-y^2=4(y\neq 0)$，其轨迹为双曲线。（也可考虑用点差法求解曲线方程）