

浅谈数学分析中用 $\varepsilon - N$ 定义证明的关键

◆熊艳琴

(南京信息工程大学 数学与统计学院 江苏南京 210044)

摘要: 数学分析中经常遇到要用 $\varepsilon - N$ 定义的习题, 这些很让当代大学生头疼。本文提供了一种证明过程中的小诀窍, 可以让学生更好的理解定义以及如何巧妙的完成证明。

一、问题的提出

《数学分析》是数学专业学生进入大学学习的第一门专业基础课, 而数列极限中的 $\varepsilon - N$ 定义也是初学学习《数学分析》的一个重要的概念, 下面我们来看看其是如何定义的。

定义 1 ($\varepsilon - N$ 定义^[1,2]): 设 $\{a_n\}$ 是一个给定的数列, a 是一个实常数。如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 可以找到正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 成立

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad (1)$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a (或 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限), 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

有时也记为

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果不存在实数 a , 使 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则称数列 $\{a_n\}$ 发散。

从上面定义可以看出, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的本质是在 a 的 ε 邻域内含有数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 这仅仅是一个必要条件。换句话说, 并不是在某个数的邻域内含有无穷多项, 该数列就收敛; 例如: 摆动数列 $\{a_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ 在 1 和 -1 的任意邻域内都含无限项, 但是该数列是发散的。同时, 改变数列的前面的有限项并不影响其收敛性; 例如: 常数数列 $\{a_n\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ 是收敛数列, 把前面 6 项替换成任意其它实常数该数列还是收敛的。此外, 我们还需注意到, N 是关于 ε 的函数; 也就是说, 给定 ε 我们才可以找到相应的 N , 这里我们可以把 ε 当做任意小的正数。自然而然的产生一个问题:

给定任意小的 ε , 如何找 N , 或者说如何用 $\varepsilon - N$ 定义来证明一个给定数列的收敛情况, 关键点在哪里?

下面一节我们将通过一个例子来说明其核心所在。

解决问题的方法

本节通过例子来解决上面提出的问题。

例 1. 用 $\varepsilon - N$ 定义证明数列 $\left\{\frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+2}\right\}$ 的极限为 $\frac{1}{3}$ 。

分析: 从定义可以看出, 证明的一个关键点就是找到满足 (1) 式的 N , 这个过程本质上是解一个方程的过程。比如, 本例题, (1) 式变为

$$\left|\frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

整理可得

$$\frac{n+1}{3(3n^2+2n+4)} < \varepsilon. \quad (2)$$

从而, 要用定义来证明, 必须从不等式 (2) 中解出满足要求的 n , 从而获得 N 。实际上, 不等式 (2) 等价于

$$9\varepsilon n^2 + (6\varepsilon - 1)n + 12\varepsilon - 1 > 0. \quad (3)$$

不等式 (3) 是我们大家所熟知的, 很容易解得

$$n > \frac{1-6\varepsilon+\sqrt{1-6\varepsilon+396\varepsilon^2}}{18\varepsilon}. \quad (4)$$

换言之, 数列从第 N , $N > \frac{1-6\varepsilon+\sqrt{1-6\varepsilon+396\varepsilon^2}}{18\varepsilon}$ 项

开始的项全部落在 $\frac{1}{3}$ 的 ε 邻域。其实, 我们也可以取

$N = \left\lceil \frac{1-6\varepsilon+\sqrt{1-6\varepsilon+396\varepsilon^2}}{18\varepsilon} \right\rceil + 1$ 。这也给出了关于写 N 的多种表达方式。

上面给出的是一种简单的思路, 实际上, 就是求解不等式 (2)。在本例题中, 不等式 (2) 转换成不等式 (3), 不等式 (3) 是一个关于 n 的一元二次方程, 从而利用韦达定理给出解的情况。如果这种等价过程最终转换的不是一个一元二次方程, 而是关于 n 的更高次方程。关于更高次方程的解, 比如 4 次, 我们是无法解的, 遇到这种情况我们该如何办呢? 从不等式 (2) 可以看出, 如果我们可以找出一个中间量 $f(n)$ 满足

$$|a_n - a| < f(n) < \varepsilon, \quad (5)$$

从而我们只需解不等式 $f(n) < \varepsilon$, 因此我们的问题也得到了解决。比如本题, 不等式 (2) 可以写成

$$\frac{n+1}{3(3n^2+2n+4)} < \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon. \text{ i.e. } \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

这样我们就找到了一个中间量 $f(n) = \frac{1}{n}$, 使得所解的不等式

变得简单起来。下面给出本例题的完整证明过程, 遇到类似的证明都可以采取这个框架来写。

证明: 由于对任意的正整数 n , 我们有

$$\left|\frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+2} - \frac{1}{3}\right| = \frac{n+1}{3(3n^2+2n+4)} < \frac{n+1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

因此, $\exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}^+$, s.t. $n > N$ 时成立

$$\left|\frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

因此, 按 $\varepsilon - N$ 定义, 可知数列 $\left\{\frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+2}\right\}$ 的极限为 $\frac{1}{3}$ 。证毕。

从上面的例题, 我们归纳如下: 利用 $\varepsilon - N$ 定义证明数列极限的收敛性问题归结于寻求 N 的过程, 本质上就是求解不等式 (1) 式; 如果从不等式 (1) 不可以直接求出 n 的范围, 那么我们需要寻求中间量 $f(n)$ 满足 (3) 式, 并且我们解不等式 $f(n) < \varepsilon$ 是很简单就可以解出 n 的范围的; 这样使得解不等式的过程其实是寻找一个可解不等式的过程, 只需做适当的放缩就可以。

参考文献:

- [1] 陈纪修, 于崇华, 金路, 数学分析 (第二版上册), 高等教育出版社 (2004)。
- [2] 肖建中, 蒋勇, 王智勇, 数学分析 (上册), 科学出版社 (2015)。
- [3] 华东师范大学数学系, 数学分析 (第四版上册), 高等教育出版社 (2010)。

