

对与“0”有关的主要问题探讨

◆颜腊林

(仙桃市仙桃小学)

0是小学数学中极其特殊的数。说其特殊,主要是0在小学数学中的作用特殊,譬如:在直尺上,0表示起点;在温度计上,0表示零上温度与零下温度的分界线;在数轴上,0表示正数与负数的分界点;在统计物体个数时,0表示一个物体也没有;在计数时,0用来占位……0的这些不可替代的特殊功能,决定了对0的关注要远超其它数字,与0有关的问题在教学中也频频出现,对0的诠释也非同一般,与0有关问题的解决还需另辟蹊径。特殊的数与特殊的功能,特别的问题与特别的解决办法,难免会引发与0相关问题的困惑和争议,小学数学教师面对这类问题也不禁感叹道:“都是0惹的祸!”0到底惹了什么祸?迷茫中,笔者搜集整理了倍受教师关注的与0相关的几个问题,并对此一一展开探寻,以期能为同行排忧解难。

1. “0”为什么是自然数?

1993年之前,我国小学数学教科书指出:表示物体个数的1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11……都是自然数;1993年之后,我国小学数学教科书补充指出:一个物体也没有,用0表示,0也是自然数。为什么要把0纳入自然数的范畴?主要原因有二。其一,便于国际交流。世界上多数国家,尤其是教育发达国家都把0定义为自然数,为了国际交流的方便,国家技术监督局于1993年12月27日发布的《中华人民共和国国家标准》GB3100~3102-93《量和单位》第311页,规定自然数集 $N=\{0, 1, 2, 3, \dots\}$;在《现代汉语词典》2005年6月第5版中也将自然数定义成:零和大于零的整数,即0, 1, 2, 3, 4, 5, ……。其二,满足数学需要。高中数学中指出,有限集合中元素的个数是可以由自然数来表示的,空集是有限集合,而空集的元素个数为0,这就要将0纳入自然数范畴,以满足空集教学的需要。

2. “0”为什么不是最小的一位数?

由于受到将0划归为自然数的影响,部分教师认为最小的一位数是0,而不应该是1。其实,自然数概念的完善,并不影响到最小一位数的改变。首先,不妨看看有关定义。《数学(算术理论部分)》(上海教育出版社,1979年6月第1版,第10页)指出:用一个数字记出的数(不是0),叫做一位数。例如:1,3,9……在一个数中,数字的个数是几(其中最左端的数字不是0),这个数就叫做几位数。其次,不妨进行假设后推理。如果最小的一位数是0,最小的两位数就是00,最小的三位数就是000,……,依此而论,岂不荒谬至极。

3. “0”是余数吗?

分东西时会出现两种情况:一是刚好分完,一个不剩;二是有剩余,当余数比除数小时,就不能继续分了。这两种分法,分别对应余数等于0和余数不等于0两种数学描述。所以,在数论中“整除”与“余数是0”是等价的概念,即“余数是0”就是“一个不剩”的意思。例如,所有的正整数除以3,根据余数可以把所有的正整数分成3类,即余数是0、余数是1、余数是2。为什么会提出“0是余数吗”的质疑呢?这可能与平时不严谨的语言描述有关。如把“没有剩余的除法”说成“没有余数的除法”,把“有剩余的除法”说成“有余数的除法”。这种把除法分成有或没有余数的描述,导致了认知冲突:既然没有余数,怎么又冒出余数是0呢?

4. “0×0”为什么等于“0”?

$0 \times 0 = 0$ 无疑是一道特殊的乘法算式。按照乘法的意义, 0×0 表示0个0相加,而0个0相加是无法写出的加法算式,又怎能知道其相加的和为0呢?其实, $0 \times 0 = 0$ 是经过了“特殊——一般——特殊”的运算过程而得出的。因为 0×3 或 3×0 表示 $0+0+0$, $0+0+0$ 的和为0,所以 $0 \times 3 = 0$, $3 \times 0 = 0$;同理可知, $0 \times 5 = 0$, $5 \times 0 = 0$; $0 \times 8 = 0$, $8 \times 0 = 0$ ……从这些特例中经过合情推理得出了一般性结论:0和任何数相乘都得0,再将这个一般性结论运用到 0×0 这一更为特殊的计算中,即可知道 $0 \times 0 = 0$ 。

5. “08”是分数吗?

各个版本的小学数学教科书都将分数定义为:一个物体、一个计量单位或是一些物体都可以看作一个整体。把这个整体平均分成若干份,这样的一份或几份都可以用分数来表示。一个整体

可以用自然数1来表示,通常把它叫做单位“1”。其中,分母表示把单位“1”平均分成的份数,分子表示从中取出的份数。从这样的描述中不难发现,八分之零只是一种形式上的分数,俗称“零分数”,即把自然数0写成了分数的形式;八分之零并不是一个实质上的分数,即其虽然把单位“1”平均分成了8份,但其未能从中取出一份或几份,取出的只是0份,也就是没有取出,显然不符合分数的定义。对此,有关数学专著早有明确,人民教育出版社出版的《基础数学》第64页定义分数时指出:“形如 $\frac{m}{n}$ (m 和 n 都是正整数,且 $n > 1$)的分数叫做分数。”^[1]

6. “x=0”是方程吗?

含有未知数的等式就是方程。从这一定义中可知,方程只一是含有未知数,二要是等式。从定义出发,毫无理由否认“ $x=0$ ”不是方程。因此,可以说“ $x=0$ ”是方程,是结构最为简单的方程,是不需求解即可知其解的方程,是方程与方程的解完全一致的方程,但其更是一个毫无价值的方程。所谓方程的本质属性是寻找和建构已知量与未知量之间的相等关系,从而通过已知求解出未知。在“ $x=0$ ”中,未知早已是已知,又何苦要将已知转化为未知呢?岂不是徒劳和无聊的折腾。

7. 在研究因数和倍数的时候,为什么一般不包括“0”?

在“因数与倍数”这个单元中,人教版义务教育教科书五年级数学下册第5页用红色字体强调指出:“为了方便,在研究因数和倍数的时候,我们所说的数指的是自然数(一般不包括0)。”北师大版义务教育教科书五年级数学上册第31页指出:“我们只在自然数(零除外)范围内研究因数和倍数。”苏教版义务教育教科书五年级数学下册第30页指出:“研究因数和倍数时,所说的数一般指不是0的自然数。”为什么这些主流教材在研究因数和倍数时,都将0排斥在外?是不能研究还是没有研究价值?从 $0 \times 1 = 0$ 、 $0 \times 2 = 0$ 、 $0 \times 3 = 0$ ……中,发现0是任何非零自然数的倍数,任何非零自然数都是0的因数。依此看来,的确是在研究因数和倍数时,如果把零纳入进来,还是可以研究,只是失去了应有的研究价值。

8. “0”为什么不能做除数、分母或比的后项?

透过除法、分数的关系可知:甲数 $\div$ 乙数 $=\frac{\text{甲数}}{\text{乙数}}$ 。如能明白除数为何不能为0的原因,即可知道分母或比的后项为何不能为0的道理。不妨对 $a \div 0 = b$ 分两种情况加以探究。当 $a=0$ 时, $a=0 \times b=0$,此时商 b 可为任何不确定数;当 $a \neq 0$ 时, $a=0 \times b \neq 0$,此时商 b 不存在;不确定的商或不存在的商,都将会使除法计算变得毫无意义,因此,数学中规定除数不能为0。

9. “1:0”在数学中不存在,为什么在生活中又常用?

在上面第8个问题的探讨中,知道比的后项不能为0,故数学中不存在类似“1:0”这样的比。但在日常生活中,常常可见足球比赛的结果是“2:0”之类比,这是为什么?不妨还是回到比的定义上进行探究。两个数的比表示两个数相除,两个数相除又表示两个数的倍比关系,即“甲数 $\div$ 乙数”,显然乙数不能为0,所以比的后项不能为0。然而,生活中类似“2:0”的比,表示的是两个数量间的差比关系,即“大数-小数”,显然小数可以为0。可见,数学中的比和生活中的比,虽然都称之为比,但其意义有着天壤之别,不可等而视之。于此,笔者认为数学来源于生活,但数学并非等同于生活。

10. 7.5×0.2 的计算结果是一位小数还是两位小数?

在教研活动中,老师们经常问到判断小数乘法的积的小数位数的问題。比如, 7.5×0.2 的计算结果到底是一位小数还是两位小数?这类问题实际上就是判断小数乘法中积的小数位数到底应该以计算法则为准,还是要看具体的计算结果的问题。笔者认为小数乘法中判断积的小数位数,应以计算法则为主,至于积的末尾有0的情况是进一步需要解决的问题。因此,在出练习时,最好不要出末尾有0来判断积的小数位数的题目,因为这样的考察没有多大的意义。学生在具体计算时,只要按计算法则先确定积的小数位数,点上小数点,再根据计算的要求去掉小数部分末尾的0即可。