参数方程在解析几何中的妙用

◆唐雨萱

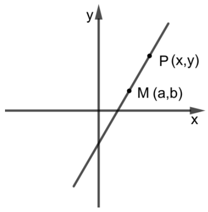
（武汉市第六中学高三(3)班　430016）

摘要：直线的表达方法除了常见的点斜式等还有一种用参数 t 来表示任意一点坐标 x,y 的方法，即参数方程法。本文主要介绍了如何用参数方程来表达一条直线，并且运用这种方法来处理求最值、轨迹问题和四点共圆等复杂的解析几何问题，给出一种清晰直观且更简便的解题思路。
关键词：参数方程；解析几何；轨迹问题；四点共圆

一、定义

一般地，在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x,y 都是某个变数 t 的函数：$\begin{cases} x=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$，并且对于 t 的每一个允许的取值，由方程组确定的点 (x,y) 都在这条曲线上，那么这个方程就叫做曲线的参数方程(*parametric equation*),联系变数 x,y 的变数 t 叫做参变数，简称参数。

二、直线参数方程基本内容



如图 1，直线的倾斜角为 α，斜率为 $k=\tan\alpha(\alpha\in 10,\pi)$，令直线过定点 $M(a,b)$，直线上一点 $P(x,y)$，$PM=|t|$，

则 $\begin{cases} x=a+t\cos\alpha \\ y=b+t\sin\alpha \end{cases}$

此时，这组关于 x,y 的方程组便为该直线的参数方程。

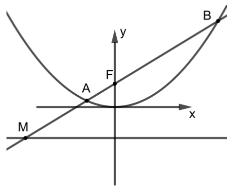
三、直线参数方程的应用

1、求最值

例 2：平面上动点 P 到点 $F(0,3)$ 的距离比它到直线 $l:y=-4$ 距离小 1，过点 F 作直线与曲线 C 交于两点 A、B，与直线 l 交于点 M，求 $|MA|\cdot|MB|$ 的最小值

一般解法：设 $P(x,y)$

由题意得 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}+1=|y+4|$ 解得 $x^2=16y$



设直线方程为 $y=kx+3$

$\begin{cases} y=kx+3 \\ x^2=16y \end{cases}$

得 $x^2-16kx-48=0$

$x_1+x_2=16k \quad x_1x_2=-48$

$A(x_1,y_1)\ A(x_2,y_2)\ M\left(\frac{-7}{k},-4\right)\ \overrightarrow{MA}=\left(x_1+\frac{7}{k},y_1+4\right)$

$\overrightarrow{MB}=\left(x_2+\frac{7}{k},y_1+4\right)$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|MA|\cdot|MB|\cdot\cos\theta=\left(x_1+\frac{7}{k}\right)\left(x_2+\frac{7}{k}\right)+(y_1+4)(y_2+4)$

即 $|MA|\cdot|MB|=(k^2+1)x_1x_2+\left(7k+\frac{7}{k}\right)(x_1+x_2)+49+\frac{49}{k^2}$

$=64k^2+\frac{49}{k^2}+113\geq 2\sqrt{\frac{49\times 64k^2}{k^2}}+113=225$

$k\in R$，所以当 $k=\frac{\sqrt{14}}{4}$ 时，$|MA|\cdot|MB|_{\min}=225$

参数方程解法：由已证得曲线 C 方程为 $x^2=16y$，设直线倾斜角为 α，因为直线过点 F，则直线参数方程为 $\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=3+t\sin\alpha \end{cases}$（ t 为参数）

代入曲线 C 方程得 $t^2\cos^2\alpha-16\sin\alpha t-48=0\ \alpha\in[0,\pi)$

$t_1+t_2=\frac{16\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad t_1t_2=\frac{-48}{\cos^2\alpha}$

$|MA|\cdot|MB|=|t_1-t_M|\cdot|t_2-t_M|$

$-4=3+t_M\sin\alpha \qquad t_M=\frac{-7}{\sin\alpha}$

所以 $|MA|\cdot|MB|=\left(t_1+\frac{7}{\sin\alpha}\right)\left(t_2+\frac{7}{\sin\alpha}\right)$

$=t_1t_2+\frac{7}{\sin\alpha}(t_1+t_2)+\frac{49}{\sin^2\alpha}$

$=\left(\frac{64}{\cos^2\alpha}+\frac{49}{\sin^2\alpha}\right)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$\geq(8+7)^2=225$

对于以上两种问题，小编认为如果题目条件中存在“直线过定点”的情况，参数方程这一方法是比较直接与方便的，以下举两个例子：

2、轨迹问题

例 3：设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过 $M(\sqrt{2},1)$，且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$，当过 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 交于两个不同的点 A、B 时，在线段 AB 上取点 Q，满足 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$，证明：点 Q 总在某定直线上

解：由题意 $\begin{cases} C=\sqrt{2} \\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \end{cases}\to a^2-b^2=2$　解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$

则 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

又动直线 l 过 $P(4,1)$，设 l 倾斜角为 α，

则 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=4+t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$（ t 为参数）

代入椭圆方程得 $(1+\sin^2\alpha)t^2+(4\sin\alpha+8\cos\alpha)t+14=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=\frac{-4\sin\alpha-8\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha} \\ t_1t_2=\frac{14}{1+\sin^2\alpha} \end{cases}$

由于 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PE}|}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$

则 $\frac{-t_1}{-t_2}=\frac{t_Q-t_1}{t_2-t_Q}$ 即 $t_Q=\frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}=\frac{-7}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$

$\begin{cases} x_Q=4+\frac{-7}{\sin\alpha+2\cos\alpha}\cdot\cos\alpha \\ y_Q=1+\frac{-7}{\sin\alpha+2\cos\alpha}\cdot\sin\alpha \end{cases}$ ①②

由①×2＋②×1得：$2x_Q+y_Q=-7+9=2$

即 Q 在定直线 $y=-2x+2$ 上；

在解析几何问题中，若题目中有“某动直线过 $P(a,b)$”，便可考虑将直线的参数方程写出来 $\begin{cases} x=a+t\cos\alpha \\ y=b+t\sin\alpha \end{cases}$（ t 为参数），再进行下一步思考，大多数情况下，我们研究的问题与直线和圆锥曲线的交点紧密相连，这时不妨将直线参数方程代入圆锥曲线的方程，则可以用“t_1+t_2”、“t_1t_2”表示出来，这样更加直观。

参数方程可以复杂的问题简单化，比较清晰与直观地将变量之间关系联系起来，是一种优良的方法。其实数学中有许多可以去研究，而研究与探索便是数学的精神，多做深入的研究与思考，不断转换思维总结方法，才能将所有由此知识点，演变和创造来的题目一眼看破，让它真正成为自己的武器。