

正交矩阵的分类

◆张里钟

(西北民族大学数学与计算机科学学院 甘肃省兰州市 730030)

摘要:通过对文献[1]的学习,我们学习了什么是正交变换,什么是正交基和规范正交基,并通过大量例题了解到了正交矩阵是一种重要的特殊矩阵,在矩阵论中能够经常用到,因此了解它的性质,掌握它的分类是必要的,譬如其上面的元素有着许多正交的性质,通过相应的转换,并对其求矩阵的行列式,组合相应的等式组,通过研究并利用正交矩阵的相关性质,解决了正交矩阵分类问题。

关键词:数学归纳法;正交矩阵;行列式

一、问题解决

在给出例题前,首先我们要推荐一个把向量基正交化的方法,也叫施密特正交化方法^[1]:

简单来说,我们先在 V_2 内考虑,设 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 是 V_2 的一个基,但不一定是正交基,通过从这个基出发,得出 V_2 的一个正交基 $\{\beta_1, \beta_2\}$,然后将 β_1 和 β_2 再分别除以它们的长度,就得到一个规范正交基。

详细来说,先取 $\beta_1 = \alpha_1$,借助于几何直观,为了求出 β_2 ,我们考虑线性组合 $\alpha_2 + a\beta_1$,从这里决定实数 a ,使 $\alpha_2 + a\beta_1$ 与 β_1 正交。由

$$0 = \langle \alpha_2 + a\beta_1, \beta_1 \rangle = \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle + a \langle \beta_1, \beta_1 \rangle$$

及 $\beta_1 \neq 0$ 得:

$$a = -\frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}$$

我们取

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$$

所以,以此类推,我们得:

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{\langle \alpha_k, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \dots - \frac{\langle \alpha_k, \beta_{k-1} \rangle}{\langle \beta_{k-1}, \beta_{k-1} \rangle} \beta_{k-1}$$

而正交矩阵中相关的列向量就是上述的规范正交基的各个元素。

因此要解决正交矩阵的分类问题,又通过基的性质以及矩阵的性质,不同的正交矩阵有不同的阶,因此我们先用数学归纳法,从阶数小的开始做起。

我们只看一下 V_2 和 V_3 正交矩阵的类型。

设 σ 是 V_2 的一个正交变换。 σ 关于 V_2 的一个规范正交基 $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ 的矩阵是

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

那么 U 是一个正交矩阵。于是

$$a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0 \quad (1)$$

由第一个等式,存在一个角 α 使

$$a = \cos \alpha, c = \pm \sin \alpha。$$

由于 $\cos \alpha = \cos(\pm \alpha)$, $\pm \sin \alpha = \sin(\pm \alpha)$, 因此可以

令 $a = \cos \varphi, c = \sin \varphi$ 。

这里 $\varphi = \alpha$ 或 $-\alpha$ 。同理,由(1)的第二个等式,存在一个角

$$b = \cos \psi, d = \sin \psi。$$

将 a, b, c, d 带入(1)的第三个等式得

$$\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi = 0$$

或 $\cos(\varphi - \psi) = 0$ 。

最后等式表明, $\varphi - \psi$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的一个奇数倍。由此可得

$$\cos \psi = \mp \sin \varphi, \sin \psi = \pm \cos \varphi。$$

所以

$$U = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ 或 } U = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

因此 V_2 有两种类型的正交矩阵。

同理可得 V_3 有三种类型的正交矩阵。

以此类推 V_n 有 n 种类型的正交矩阵,即 n 阶正交矩阵有 n 种不同类型的矩阵。

二、总结

由问题的解决以及参考文献和例题得出:因为正交矩阵每一列向量线性无关,又是规范正交基,所以通过相关的正交矩阵的性质,可以将正交矩阵的元素未知数组成相关的等式组,然后再通过相关的代换,如三角代换,就可以最终求出正交矩阵的元素值来,那么正交矩阵的分类问题也就解决了,即正交矩阵为 n 阶矩阵,则其有 n 种类型, n 可以为任意正整数。

参考文献:

[1]张禾瑞,郝炳新.《高等代数》.北京:高等教育出版社,2009年第五版。

