

例谈巧用导数证明一类组合恒等式

◆彭卫星

(江苏省海门中学 226100)

我们知道,导数是研究函数有关性质的好帮手,它也是解决一类组合恒等式问题的好方法,容易理解,并且简单易于操作.利用构造函数求导来解决组合数问题,难在构造函数,关键在于组合数的系数及上下标的特征,如何与所要构造的函数的特征结合起来,特别是系数,主要是通过 $(x^n)' = nx^{n-1}$, $((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$ 等函数的导数来构造,现举例如下.

一、组合数下标相同,上标是连续变化的自然数,系数也是连续的自然数

例1:证明: $\sum_{i=1}^n iC_n^i = n \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

分析:我们知道证明 $\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$,可由展开式 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$,对 x 赋值1,可得证.观察等式 $\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$ 与所证等式之间的联系,发现等式左边第 $i+1$ 项 iC_n^i 比 C_n^i 多了个 i ,我们又想到导数公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$,所以可利用该导数公式解决系数 i ,因此我们对展开式 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$ 两边求导得到 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^n iC_n^i x^{i-1}$,对两边 x 赋值1即可证得.

证明: $\because (1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$,

对上式两边求导,得 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^n iC_n^i x^{i-1}$,

我们对上式两边 x 赋值1,得 $\sum_{i=1}^n iC_n^i x^{i-1} = n \cdot 2^{n-1}$.

而如果我们对式子两边 x 赋值-1,可得另一恒等式

$$\sum_{i=1}^n i(-1)^i C_n^i x^{i-1} = 0.$$

变式1:证明: $\sum_{i=0}^n (i+1)C_n^i = (n+2) \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

分析:变式1与例1相比较,例1的系数与组合数的上标相同,而变式1的系数比组合数的上标大1.既然例1可以借助导数公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ 解决了系数问题,那么变式1可否利用该导数公式解决系数问题呢?答案是肯定的,我们只要借助 $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$ 就可以解决系数问题,因此只要在展开式 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$ 两边同乘以 x ,再求导后两边 x 赋值1即可证得.

证明: $\because (1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$,

对上式两边同乘以 x ,得 $x(1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{i+1}$,

对上式两边求导,得 $(1+x)^n + n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^n (i+1)C_n^i x^i$,

我们对上式两边 x 赋值1, $2^n + n \cdot 2^{n-1} = \sum_{i=0}^n (i+1)C_n^i$,

即 $\sum_{i=0}^n (i+1)C_n^i = (n+2) \cdot 2^{n-1}$.

而如果我们对式子两边 x 赋值-1,可得另一恒等式

$$\sum_{i=0}^n (i+1)(-1)^i C_n^i = 0.$$

变式2:证明: $\sum_{i=0}^n (m+i)C_n^i = (2m+n) \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*, i, m \in \mathbb{N})$.

变式3:证明: $\sum_{i=0}^n (m+i)(-1)^i C_n^i = 0 (n \in \mathbb{N}^*, i, m \in \mathbb{N})$.

分析:变式2可以视作是对例1,变式1的推广,因此可以在展开式 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$ 两边同乘以 x^m ,再求导后两边 x 赋值1即可证得变式2.对 x 赋值-1即可证得变式3.(证明略)

若组合数的下标是固定不变的数,上标是从0开始的连续的自然数,系数是连续的自然数;或系数的绝对值是连续的自然数,且正负号交替出现,则可用上述方法构造函数并求导,再结合赋值法就能解决此类问题.

二、组合数下标相同,上标是连续变化的自然数,系数是两组连续的自然数的积

例2:证明: $\sum_{i=1}^n i^2 C_n^i = (n^2 + n) \cdot 2^{n-2} (n \in \mathbb{N}^*, i \in \mathbb{N}^*)$.

分析:我们已经有了证明例1及其变式的经验,系数可以利用导数公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ 来解决,如何解决呢?我们观察第 $i+1$ 项的系数 $i^2 C_n^i$,组合数前的系数是 i^2 ,通过对 $C_n^i x^i$ 求导可得 $iC_n^i x^{i-1}$,既然通过一次求导就可以产生系数 i ,那么我们再求导一次又可以产生系数,但是我们发现再一次求导后是 $(i-1)iC_n^i x^{i-2}$,不能直接求导,所以要再一次产生系数 i ,只要对 $iC_n^i x^{i-1}$ 乘以 x 后再求导就可.

证明: $\because (1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$,

对上式两边求导,得 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^n iC_n^i x^{i-1}$,

两边同乘以 x ,得 $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^n iC_n^i x^i$,

两边求导,得

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{i=1}^n i^2 C_n^i x^{i-1},$$

对上式两边 x 赋值1,得 $\sum_{i=1}^n i^2 C_n^i x^{i-1} = (n^2 + n) \cdot 2^{n-2}$.

对式子两边 x 赋值-1,得 $\sum_{i=1}^n i^2 (-1)^i C_n^i x^{i-1} = 0$.

若组合数的下标是固定不变的数,上标是从0开始的连续的自然数,系数是两组连续的自然数的积;或系数的绝对值是两组连续的自然数的积,且正负号交替出现,则可用上述方法构造函数并求导,再结合赋值法就能解决问题.还可以进一步推广,系数或系数的绝对值是一组或几组连续自然数的积,都可以用上述方法.

作者简介:彭卫星,1978.7,汉族,男,江苏启东,中学高级,数学教育方向.