

$c[0,1]$ 中构造 $w=\delta(1, x, \dots, x^9)$ 到 $f(x)=e^x$ 的最佳逼近

◆张里钟

(西北民族大学数学与计算机科学学院 甘肃省兰州市 730030)

摘要: 本文基于对文献[1]和[2]的学习, 对最佳逼近的研究, 决定利用数学归纳法, 来解决 $c[0,1]$ 中构造 $w=\delta(1, x, \dots, x^9)$ 到 $f(x)=e^x$ 的最佳逼近问题, 在此过程中掌握知识以及巩固知识。经过对它的研究, 我们对其有了更深的了解。

关键词: 最佳逼近; 正射影; 数学归纳法

一、问题解答

首先由文献[1]中 p308 例二以及 p316 例五中的数列求出的规范正交基, 由此得到 W 的每一元素都可以写成

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

的形式。可得在文献[1]第八章的例七中 $P_n(x)$ 的值与函数的差的长度的最小值可求得此时 $P_n(x)$ 为 W 到函数的最佳逼近。

因此考虑 $[0,1]$ 上连续函数 $f(x)=e^x$ 所成的向量空间 $c[0,1]$ 令 W 由以下函数:

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9$$

所生成的子空间。下面我们将一次讨论当 $\dim W=n(n=1,2,\dots,9)$ 时的最佳逼近。

(1) 当 $\dim W=1$ 时, 很显然 $f(x)=e^x$ 的最佳逼近为 1。

(2) 当 $\dim W=2$ 时, 即 $w=\phi(1,x)$ 时, 有

$$\alpha_0=1, \alpha_1=\sqrt{3}x$$

是 W 上的一个规范正交基。

由公式(1)的三角多项式可得:

W 的每一个元素都可以写成

$$P_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 x \quad (2)$$

的形式。 $P_2(x)$ 叫作一个 2 次三角多项式。设 $f(x) \in C[0,1]$ 。我们求一个 2 次三角多项式 $P_2(x)$, 使得

$$\int_0^1 [f(x) - P_2(x)]^2 dx \quad (3)$$

的值最小, 那么此时的 $P_2(x)$ 的值便是 W 到函数 $f(x)$ 的最佳逼近。

这正是上面所说的 W 对于 $f(x)$ 的最佳逼近问题。因此, 所求的 $P_2(x)$ 应该是 $f(x)$ 在 W 上的正射影。由文献[1]中定理 8.2.4, 我们有

$$p_n(x) = \langle f, \alpha_0 \rangle \alpha_0 + \langle f, \alpha_1 \rangle \alpha_1 \quad (4)$$

与等式(2) $P_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 x$ 作比较, 我们得到

$$\frac{a_0}{2} = \langle f, \alpha_0 \rangle = \int_0^1 e^x dx = e-1 \quad (5)$$

从而可得:

$$a_0 = 2(e-1) \quad (6)$$

同理可得:

$$a_1 = 3x \quad (7)$$

故可得

$$f(x)=e^x \text{ 在 } W \text{ 上的正射影为 } p_2(x)=e-1+3x$$

以此类推

(3) 当 $\dim W=10$ 时, 即 $w=\phi(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9)$ 时, 有

$$\alpha_0=1, \alpha_1=\sqrt{3}x, \alpha_2=\sqrt{5}x^2, \alpha_3=\frac{x^3}{\sqrt{\int_0^1 x^6 dx}}=\sqrt{7}x^3$$

$$\alpha_4=\frac{x^4}{\sqrt{\int_0^1 x^8 dx}}=\sqrt{9}x^4, \alpha_5=\frac{x^5}{\sqrt{\int_0^1 x^6 dx}}=\sqrt{11}x^5,$$

$$\alpha_6=\frac{x^6}{\sqrt{\int_0^1 x^{12} dx}}=\sqrt{13}x^6, \alpha_7=\frac{x^7}{\sqrt{\int_0^1 x^{14} dx}}=\sqrt{15}x^7$$

$$\alpha_8=\frac{x^8}{\sqrt{\int_0^1 x^{16} dx}}=\sqrt{17}x^8, \alpha_9=\frac{x^9}{\sqrt{\int_0^1 x^{18} dx}}=\sqrt{19}x^9 \quad (8)$$

是 W 的一个规范正交基, 那么根据维数是 2 时的算法可知:

$$\alpha_9 x^9 = \langle f, \alpha_9 \rangle \alpha_9 = \int_0^1 e^x \sqrt{19} x^9 dx * \sqrt{19} x^9 = \sqrt{19} x^9 (362880 - 133496e) \quad (9)$$

故 $f(x)=e^x$ 在 W 上的正射影为

$$P_{10}(x) = e - 1 + 3x + 5x^2(e-2) + 7x^3(6-2e)$$

$$+ 9(9e-24)x^4 + 11(120-44e)x^5$$

$$+ 13(265e-720)x^6 + 15(5040-1854e)x^7$$

$$+ 17(14833e-40320)x^8 + 19(362880-133496e)x^9 \quad (10)$$

以上所求 $P_n(x)$ 则是当 $\dim W=n$ ($n=1,2,\dots,9$) 是的最佳逼近。

二、问题总结

综上所述, 根据上面所述以及文献中的例题总结, 这类题目, 首先

第一步: 得根据所给 W 这个空间进行判断, 判断其基, 也就是一组线性无关的生成元, 若只有一组, 则直接进行下一步, 若有多种可能, 则对其进行分类犹如上题“ $c[0,1]$ 中构造 $w=\delta(1, x, \dots, x^9)$ 到 $f(x)=e^x$ 的最佳逼近”一般。对其进行不同类型分类, 分别求其在那种情况下的最佳逼近。

第二步: 然后将基进行施密特正交化, 将其转化为 W 的一个规范正交基。

第三步: 求出 $P_n(x)$ 这个 n 次三角多项式。

第四步: 然后根据这个公式 $\int_0^1 [f(x) - p_n(x)]^2 dx$, 在此 $\int_0^1 [f(x) - p_n(x)]^2 dx$ 公式最小值时, 结合傅里叶系数和文献[1]里定理 8.2.4 得, $P_n(x)$ 的值就是其最佳逼近。

参考文献:

- [1] 张永瑞, 郝炳新.《高等代数》.北京: 高等教育出版社, 2009 年第五版
- [2] 张贤科, 许甫华.《高等代数学》.北京: 清华大学出版社, 1998 年第一版

