关于导数问题的一些想法

◆王紫舟

（邢台市第二中学　河北邢台）

摘要：高中阶段，导数在函数中的应用很广，是分析和解决问题的有效工具。利用导数可以判断或者论证函数的单调性，求函数的极值或最值，以及证明不等式等，因此它成为高考命题的热点。本文以几个典型类型的题目为例，说明了利用导数解决问题方法以及注意事项和常见错误，供学习者借鉴。

关键词：高考；导数；典型题目；常见错误

对于导数问题，历年来都是高考中的热门题型，又是压轴题型，而且导数问题变化众多。所以说，掌握好导数，是高中数学学习的一大重点，也是难点。

一、典型题目

例 1、已知函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x}$，其中，a ∈ R，讨论 $f(x)$ 在区间（0，e)上的单调性。

解：$f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x}$ 定义域（0，+∞).（易错提醒：很多同学会丢掉求函数定义域这一步骤而导致错误）

$f'(x)=1-\frac{a+1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2}=\frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$（小技巧：对于导数这部分来说，尤其是导函数，能分解因式就尽可能多的分解，不要拆成单项，因为很多时候都是一个整体为正或为负）(思考，若 x∈R,令 f'(x)=0,得 $x_1=1$　$x_2=a$ 可现在 x∈（0，+∞） x=a 此根是否在定义域内呢？)（易错提醒:若不知导函数某根是否在定义域内，那么就不能直接得出 x=a，因为如果不在定义域内，那么此根就不存在，怎么能解出根的值呢？这里体现了数学的严谨性，所以在此应分情况讨论）

(讨论Ⅰ，有没有极值点）

在此题中，x=1 一定是 f'(x)　=0 的一个根，所以只需讨论 a 是否在定义域即可。小技巧：分为“有”与“没有”两种情况时，临界等号通常分在“没有”的情况下。

1.a≤0时(a不在定义域内） x–a＞0　x^2＞0　令f'(x)　=0 得 x=1

x	（0,1）	1	（1，e）
f'(x)	–	0	+
f(x)	↘	小	↗

此时 f（x）单调递减区间为（0,1）单调递增区间为（1，e）（易错提醒：有些学生爱答:f(x）在（0,1）上单调递减。但在我看来，这句话不够严谨。因为 f（x）在（0,1）上单调递减只能说明(0,1)是 f(x)单调递减区间的一个子集，怎么说明就是（0,1）呢？）

a＞0 时（a 在定义域内）令 f’(x)　=0 得 $x_1=1$ $x_2=a$

（讨论Ⅱ，极值点在不在给定区间）x=1 一定在。讨论 x=a 是否在即可。(小技巧：将 x=a 分为“在”与“不在”两种情况，将临界等号分在“不在”情况下）

①a≥e 时（不在给定区间）

x	（0,1）	1	（1，e）
f'(x)	+	0	–
f(x)	↗	大	↘

$f(x)$ 单调减区间是（1，e）单调递增区间是（0，1）

②0＜a＜e 时（在给定区间）

（讨论 Ⅲ：两根比大小)(小技巧：此时分的情况有别于上述两种，分为大于、等于、小于）

i)当 0＜a＜1 时

x	（0,a）	a	（a，1）	1	（1，e）
f'(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	大	↘	小	↗

$f(x)$ 单调递减区间是（a，1）单调递增区间是（0，a）和（1,0）(易错提醒：连接区间时，不可使用 U，应该用“和”或“,”)

ii)当 a=1 时　$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$　f(x)无单调区间递减区间，单调递增区间为（0，e）

iii)当 1＜a<e 时

x	（0,1）	1	（1，a）	a	（a，e）
f'(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	大	↘	小	↗

f(x)单调递减区间是（1，a）单调递增区间是（0,1）和（a，e）

（小技巧：最后综上所述，便于阅卷老师检查，防止因老师未看见而扣分）综上所述：在(0,e)上，a≤0 时，f（x）单调递减区间时(0,1)单调递增(1,e)　0＜a＜1 时 f(x)单调递减区间是(a，1）单调递增区间是（0，a）和（1,0）　a=1 时 f(x)无单调区间递减区间，单调递增区间为（0，e），当 1＜a<e，f(x）单调递减区间是（1，a）单调递增区间是（0,1）和（a，e）(小技巧：最后浏览，将能合并的进行合并）

例 2：(极值点的偏移）已知 f（x）$=xe^{-x}$，若 $x_1\neq x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ 求证 $x_1+x_2>2$

解:$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$ 令 f'(x)=0 得 x=1　x<1 时 f'(x)＞0 f(x)单调递增，x>1 时 f'(x)＜0 f（x）单调递减

方法一（构造新函数）令 F（x）=f（x）–f（2–x）(要证 $x_1+x_2>2$.所以想到 $x_1>2-x_2$)$=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$　F'(x)=f'(x)–f'(2–x）=（x–1)($e^{x-2}-e^{-x}$）令 $h(x)=e^{x-2}-e^{-x}$　$h'(x)=e^{x-2}+e^{-x}>0$ 且 h（1）=0 所以 x＜1 时 h(x)＜0，x＞1 时 h（x）>0 所以 x＜1 时 F'(x)＞0 ，x＞1 时 F'(x)＞0 所以 F(x)在 R 上单调递增。又因为 F(1)=0 所以 x<1 时 F(x)<0 x>1 时，F(x)>0 不妨设 $x_1<1<x_2$, F（x_1）=f（x_1）–f（2–x_1）＜0，f（x_2）=f（x_1）＜f（2–x_1）　$x_2>1$ 2–x_1＞1 所以 $x_2>2-x_1$ 所以 $x_1+x_2>2$

方法二：化二元为一元　f（x_1）$=x_1e^{-x_1}$　f（x_2）$=x_2e^{-x_2}$　$x_1e^{-x_1}=x_2e^{-x_2}$　$\frac{x_1}{x_2}=e^{x_1-x_2}$　$\ln\frac{x_1}{x_2}=x_1-x_2$，(此时化二元为一元，一般将指数式的指数或对数式的真数化为另一元）令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $x_1=tx_2$ 不妨设 $x_1\rangle x_2$ 则 t＞1　ln t=x_2(t–1）$x_2=\frac{\ln t}{t-1}$　$x_1=tx_2=\frac{t\ln t}{t-1}$

要证 $x_1+x_2>2$ 只需证 $\frac{t\ln t}{t-1}+\frac{\ln t}{t-1}>2$ 只需证 ln t(t+1）＞2t–2.即证 ln t（t+1）–2t+2＞0，令 g（t）=ln t（t+1）–2t+2（t＞1），　g’（t）$=\frac{1}{t}+\ln t-1$，　g’（t）= $-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t^2}>0$ 所以 g’（t）在（1，+∞）单调递增，又因为 g’（1）=0 所以 t＞1 时 g’（t）＞0 所以 g’（t）在（1，+∞）单调递增，又因为 g’（1）=0，所以 g（t）>0 在（1，+∞）恒成立。所以可证得 $x_1+x_2>2$。

例3:（求参数的取值范围）（2016年全国Ⅱ卷(2)）已知函数f(x)= $(x+1)\ln x-a(x-1)$ 当 $x\in(1,+\infty)$时，f（x）> 0.求a的取值范围。

方法一：分情况讨论，f(x)= $(x+1)\ln x-a(x-1)$ f'(x)= $\ln x+\frac{1}{x}+1-a$。f''(x)= $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$ 当 x > 1 时 f'(x) > 0，所以f'（x）在（1，+∞）单调递增，f'（1）=2−a

①f'（1）=2−a ⩾0时。即a⩽2时f'（x）> f'（1）⩾0。所以f（x）在（1，+∞）单调递增。又因为f（1）=0，f（x）> f（1）=0所以该情况成立。

②当f'（1）=2−a < 0即a > 2时，x无限接近于正无穷时，f'（x）无限接近于正无穷，所以f'（x）一定有一个零点 x_0 且 x_0 > 1，f'（x_0）=0.x_0 > x > 1 时，f'（x）> 0，f（x）单调递减，x > x_0时，f'（x）> 0，f（x）单调递增。所以 x_0>x>1时f(x) < 0，所以f（x）> 0不恒成立。所以该情况不成立，综上所得，a⩽2.

方法二：分离参数 x > 1时f（x）=（x+1）ln x−a（x−1）> 0 $a<\frac{(x+1)\ln x}{x-1}$ 令 $g(x)=\frac{(x+1)\ln x}{x-1}$，令 $g'(x)=\frac{-2x\ln x+x^2+1}{x(x-1)^2}$，令 $s(x)=-2x\ln x+x^2-1$ s'(x)=−2lnx−2+2x=2(x−lnx−1)令t(x)=x−lnx−1,t'(x)= $1-\frac{1}{x}$,x > 1时,t'(x) > 0，所以t（x）在（1，+∞）单调递增，又因为t(1)=0所以t(x)>0 所以s'(x)>0所以s(x)在(1，+∞)上单调递增，又因为s（1）=0所以s（x）> 0所以g'（x）> 0， 所以g（'x）在（1，+∞）单调递增 所以g（x）的最小值在x=1处取得，x=1时可发现 $g(x)=\frac{0}{0}$。现可使用洛必达法则，（稍后说明）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x+\frac{1}{x}+1\right)=2$ 所以a⩽2

对于洛必达法则，高中课本并未涉及，所以在考试中不建议使用，但如果别的方法实在不会，就只能用洛必达法则了，现简单介绍一下洛必达法则，使用条件1.满足 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型=f（x）,g(x)在限定区域内可导。则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 若 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 在 $x=x_0$ 处仍是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型且满足洛必达法则，就再次使用，若还是就再次使用，直至使得得到有限实数或无穷大。一定要牢记使用条件如 $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$ 答案是错误的，因为对于 $\frac{\cos x}{2x}$ x=0时是 $\frac{1}{0}$，不再满足使用的条件，此时洛必达法则就不能使用了，对于高中的我们，洛必达定则掌握到这里就可以了，不到万不得已，尽量不要使用。

对于此类题型，有时使用分离常数的方法比较简单，但此方法属于数形结合，对于大题来说，不好叙述，所以该方法有时得不到满分，所以当使用分类讨论的方法能掌握时，尽量使用分情况讨论的方法。

常见错误

常见错误在上述例题中基本都已提及，现再次做出结论。1，关于内外层函数求导时。学生易忘记将内层函数求得的结果与外层函数得到的结果相乘：如：f(x）=cos（2x+1） f'(x)=−2sln（2x+1）(正) f'(x)=−2 sin（x+1）(误)2.关于两个相乘得到新函数的求导，F(x)=f（x）g（x） F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)(正)。F（x）=f'(x)+g'(x)(误)。3.在不知极值点是否在定义域内时，不能直接令f'(x)=0。4.并列两个区间时不能使用“U”而应用“和”或“，”。

最后，我想说一说对解导数题的一些思想，解导数题时要做到条理清晰，分情况的层次感要强。不要一直低头硬做，要时不时的看一看题目中是否有隐含条件，看看是否有f（1）=0 f（e）=1之类的特殊值。一种方法解不下的时候，可以想想还有没有别的办法，因为有些题目在众多方法中只有一种是简便可行的，可以多尝试几次。所以说，导数并不是那么可怕，只要我们在平时学习中，注意总结思路，积累方法那么在考试中就应该能拿到分数了。