投资的收益和风险的优化研究

◆彭　红

（长湖中学　湖南省岳阳市　414000）

摘要：本文建立了投资的收益与风险的投资组合方案，使净收益尽可能大，且总体风险尽可能小。1 风险越大，收益越大。2 当投资越分散时，投资者承担的风险越小，这与题义一致。即，冒险的投资者会出现集中投资的情况，保守的投资者则尽量分散投资。

关键词：投资；收益与风险

1 问题的提出

现在我们有一定的资金，想在市场中进行投资，投资每个项目有一定的的收益和风险，怎么计划我们的投资使我们得到最大的收益，而使我们所经历的风险最小是一个值得讨论的问题。

市场上有 n 中资产 S_i (i=1,2,……,n)可以选择作为投资项目，现用数额为 M 的相当大的资金作一个时期的投资。这 n 中资产在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i，风险损失率为 q_i，投资越分散，总的风险越小，总体风险可以用投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。

购买 S_i 时要付交易费（费率 p_i），当购买额不超过给定值 u_i 时，交易费按购买 u_i 计算。另外，假设同期银行存款利率是 r_0 (r_0=0.005)，即无交易费又无风险。

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定的资金 M，有选择的购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，且总体风险尽可能小。

2 基本假设

1 投资数额相当大，为了方便计算，假设 M=1；2 投资越分散，总的风险越小；3 总体风险用投资项目 S_i 中最大的一个风险来度量； 4 n 中资产 S_i 之间是相互独立的； 5 在投资这一个时期内，r_i，q_i，p_i，r_0 为定值，不受以为因素影响；6 净收益和总体风险只受 r_i，q_i，p_i影响，不受其他因素干扰。

3 符号设定

S_i——第　i 中投资项目，如股票，债券

r_i，q_i，p_i——分别为 S_i 的平均收益率，风险损失率，交易费率

u_i——S_i 的交易定额　　　　r_0——同期银行利率

x_i——投资项目 S_i 的资金　　ΔQ——总体收益的增量

Q——总体收益

4 模型分析与模型建立

1 总体风险用所投资的 S_i 中的最大一个风险来衡量，即 $\max\{q_i x_i | i=1,2,\cdots,n\}$.

2 购买 S_i 所付交易费是一个分段函数，即

交易费= $p_i x_i, x_i > u_i$　　$p_i u_i \;, x_i \le u_i$

而问题所给定的定值 u_i（单位：元）相对投资 M 很小，$p_i u_i$ 更小，可以忽略不计，这样购买的净收益为（r_i —p_i ）x_i。

3 要使净收益尽可能大，总体风险尽可能小，这是一个多目标规划模型：

目标函数: $\max \sum_{i=1}^{n+1}(r_i - p_i)x_i$

in{max{$q_i x_i$}}

约束条件 $\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M$,　x_i>=0, i=1,2, …, n

4 模型简化：

a. 在实际投资中，投资者承受风险的程度不同，若给定一个界限 a，使最大的一个风险 q_i x_i/M<=a ，可找到相应的投资方案。这样把多目标规划变成一个目标的线形规划。

模型 1 ：固定风险水平，优化收益

目标函数：Q=max $\sum_{i=1}^{n+1}(r_i - p_i)x_i$ 约束条件：$\frac{q_i x_i}{M} \le a$

$\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M$, x_i>=0, i=1,2, …, n

b. 若投资者希望总盈利至少达到水平以上，在风险最小的情况下寻找相应的投资组合。

模型 2　固定盈利水平，极小化风险

目标函数：R=min{max{$q_i x_i$}}

约束条件：$\sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i \ge k$, $\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M$ ，x_i >=0, i=1,2, …, n

c.投资者在权衡资产风险和预期收益两方面时，希望选择一个令自己满意的投资组合，因此对风险收益赋予权重，称为投资偏好系数。

模型 3　引进权重

目标函数：min S{max{$q_i x_i$}}−−−−−(1−−−S) $\sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i$

约束条件: $\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M$, x_i>=0, i=1,2, …, n

5 模型的求解

我们给出一些数据，按照模型 1 进行求解，数据如下：

投资项目 S_i	平均收益 r_i（%）	交易费率 q_i（%）	风险损失率 p_i（%）	交易定额 u_i（%）
S1	28	2.5	1	103
S2	21	1.5	2	198
S3	23	5.5	4.5	52
S4	25	2.6	6.5	40

对表中给定的数据，模型 1 为：

min f=(−0.05,−0.27,,0.19,−0.185,−0.185)(x0, x1,x2,x3,x4) ^{T}

x0+1.01x1+1.02x2+1.045x3+1.065x4=1

0.025x1　　　　　　　　<=a

0.015x2　　　　　<=a

0.055x3　　　<=a

0.026x4<=a

x_i >=0(i=0,1,2,3,4)

6 结果分析

由计算结果和图可得到以下结论：1 风险越大，收益越大。2 当投资越分散时，投资者承担的风险越小，这与题义一致。即，冒险的投资者会出现集中投资的情况，保守的投资者则尽量分散投资。

参考文献：

[1]运筹学教程.胡运权.北京：清华大学出版社，1995
[2]数学模型.姜起源 谢金星.高等教育出版社 2003
[3]数学建模.徐全智 杨晋浩.高等教育出版社 2003.7
[4]数学建模及试验.王冬琳.国防工业出版社 2004.5