

构造法在中学数学中的运用

◆洪雅伦

(广东省汕头市潮阳区棉城中学)

摘要:构造法是数学解题中较为常用的一种方法,尤其是在数学分析中构造法的使用尤为广泛。其实,构造法是通过将题目中未知的或已知的事物转化为具有一定规律或一定定义的数学公式或方法,从而对题目进行解答。在中学阶段,虽然在高中课本中并没有明确给出构造法这一定义,但是在一些解题中也用到了构造法的思想。通过让中学生事先接触构造法的思想,有助于让学生在接下来的高等数学中更好地理解并运用构造法。在接下来的内容里我将通过三角函数,数列和不等式三个方面来分别讲述构造法在中学数学中的应用。

关键词:构造法;三角函数;数列;不等式

1.引言

在数学的诞生之日起,数学中构造性的解题技巧也随之诞生。对此,直觉派提出了一个口号:“存在必须是被构造”。直到现代,数学构造法已被广泛地应用于各种数学解题中。构造法的本质就是通过构造一个与已知(或隐含或待求证)相联系的数学模型,再充分利用这个数学模型所具有的性质特点来对题目进行求解。

构造法是一种非常简便、新颖的解题方法,它的灵活性大大吸引了学生的求知欲望。但是,对于构造法他们又不知如何入手。故而,这就需要教师在平时的教学中多为学生提供更多的解法,并且对每一种方法的优缺点都进行比较,从而逐步培养学生的解题速度,并且让学生从中掌握到最简的方法,为学生能更好地运用构造法打下化繁为简的思维基础。

除此之外,教师还需要培养学生的联想构造能力。比如,在遇到题目时,教师可以引导学生思考并联想,题目中哪些条件与之前学过的某些知识点是有联系的?这道题目是否与之前做过的某道题型相似?解法是否也相似?题目问题是否可以转化为求解另外的更容易解答的问题?诸如此类,通过引导学生层层联想,有助于让学生自行构造一个合适的数学模型,最后找到解决方法。

但是,构造法只是我们解决数学题目的一种技巧,在运用构造法时,我们还需要与其他数学知识相结合。构造法只是帮助我们构造出一个我们所熟悉的数学模型,但是在求解题目的过程中,我们依旧需要运用到我们所构造的数学模型的性质特点,诸如函数思想、数形结合、不等式思想、方程思想、向量思想等等。因此,只有在我们熟悉各类数学知识和数学思想方法的前提下,我们才能灵活运用构造法。

构造法是一种思维跳跃性极大的数学解题方法,它不仅可以在运用在函数上,也可以运用到方程等其他方面,它在数学的各个分支均有渗透。构造法也是一门没有固定规律的方法,它的使用需要调动到我们的各种数学思维,结合抽象思维,逆向思维,发散思维等多种数学思维的共同参与。但是,只要运用得当,它便能够为我们解题提供一个便捷的桥梁,特别地,在运用构造法解题的过程中,有助于激发学生的发散性和创造性思维,从而培养学生的学习兴趣和提高学生的解题能力。

高中数学中会有多个方面使用到构造法。在本篇文章中,我将从三角函数、数列、不等式三个方面来讲述构造法在其解题中的运用。

2.三角函数

函数具有很多特殊的性质,特别地,函数还可以通过与图像相结合来达到让人更好地理解函数的目的,即是所谓的数形结合思想。在解答三角函数的题目时,如果能够恰当地利用函数的性质,那将有助于让我们对三角函数题目进行求解。故而,构造函

数也是为我们解题的一个新的思路。

例一已知 $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], a \in R$ 且 $\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0 \\ 4y^3 + \sin y \cos y + a = 0 \end{cases}$, 求

$\cos(x+2y)$ 的值。

分析如下:本题若利用常规的三角函数的三角恒等变换公式去做,是很难下手的。我们可以观察到在方程组内的两条式子里均含有一个 a ,则我们也许可以想办法将两条式子中的 a 值消去,由第一条式子我们可以得到 $2a = x^3 + \sin x$,由第二条式子我们能得到 $2a = -8y^3 - 2\sin y \cos y = (-2y)^3 + \sin(-2y)$ 。因为 $2a$ 是相等的,所以可以联立两条式子得到 $x^3 + \sin x = (-2y)^3 + \sin(-2y)$ 。由此我们可以构造一个函数,

即为 $f(t) = t^3 + \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。然后再利用函数的增减性对函数进行求解。

小结:此题是三角函数中构造函数函数的一个典型题目。通过构造一个熟悉的复合函数将题目中的式子简单化,有助于让我们更好地理解。在三角函数中并不仅仅只有三角公式,构造函数的方法也有助于我们解题。

3.数列

在高考中,数列是很重要也是很有难度的一章。而数列的解题方法有多种,包括叠加法、倒序相乘法、裂项相消法、错位相减法以及构造法等。数列在构造法上有很多种类型,接下来就先讲述构造等差数列。通常题目给出的数列并不是等差数列,但是我们能够通过加减或者乘除等来对其变形使之变为我们需要的等差数列。

例二已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_2 = 5, a_n = a_{n-2} + 4n - 3 (n \geq 3)$, 求通项公式 a_n 。

分析如下:对于本题,我们可利用待定系数法对原式子进行变形,令 $a_n + An^2 = a_{n-2} + An^2 + 4n - 3$,然后再分别对式子两边平方,可得 $a_n + An^2 = a_{n-2} + A(n-2)^2 + (4A+4)n - 4A - 3$,令 $4A+4=0$,解得 $A=-1$ 。所以可得 $a_n - n^2 = a_{n-2} - (n-2)^2 + 1 (n \geq 3)$ 。至此,我们已经构造出了等差数列 $\{b_n\}$ 。但是在这里我们必须要注意一下,由于构造出数列的底数是 n 和 $n-2$,也即是由于奇偶性不同我们需要构造出两个不同的数列,分别是当 n 为奇数时和 n 为偶数时的两种不同情况,然后再根据 $b_n = a_n - n^2$ 分别列出 a_n 的通式。

小结:本题的解题关键就在于构造出等差数列。我们需要熟练掌握待定系数法,然后利用待定系数法所求得的数字代入所设的式子中,从而构造出我们需要的等差数列。在求出等差数列之后,我们必须认真审题,就像本题一样,在最后的时候我们还需要根据奇偶性判断出最后的通式。

4.不等式

在证明不等式时,构造函数是较为常用的一种方法,我们需要仔细观察条件,包括题设以及隐含的条件,根据问题的结构来构造合适的函数,再利用函数的思想和方法来解决问题。

例三设 $x > 0, y > 0$, 且 $0 < \alpha < \beta$, 求证 $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ 。

分析如下:对于这道题目,我们可以先从要证明的不等式出发,

即先将 $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ 进行变形得到 $\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} > \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$, 两边取对数可得

$\ln \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} > \ln \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$, 为方便我们观察, 我们不妨令 $p = \frac{y}{x}$, 从而将上式化为 $\frac{\ln(1+p^\alpha)}{\alpha} > \frac{\ln(1+p^\beta)}{\beta}$ 。至此, 我们便

可以开始构造函数 $f(u) = \frac{\ln(1+p^u)}{u}, u \in (0, +\infty), p > 0$, 利用导数与函数单调性的关系, 对函数 $f(u)$ 进行求导得出函数 $f(u)$ 为减函数, 又因为 $0 < \alpha < \beta$, 从而得出 $\frac{\ln(1+p^\alpha)}{\alpha} > \frac{\ln(1+p^\beta)}{\beta}$ 。原不等式得证。

小结: 在利用构造函数来证明不等式时, 我们需要抓住题目的结构特点。以本题为例, 我们可以先从结论入手, 对我们所需要证明的不等式进行变形, 然后我们再根据变形之后得到的式子构造相同结构的函数。最后利用函数的性质, 包括导数、单调性、奇偶性等来解决题目。

5. 结束语

5.1 论题小结

构造不是凭空得来的, 它需要我们结合以往学过的数学知识, 展开合理的联想与想象, 对问题进行思考, 从而构造出我们

所需要的数学模型。在使用构造法时, 我们必须要把把握好数学间不同知识板块之间的区别与联系。运用构造法解题, 可以快速简便地解决问题, 其关键就在于对问题的变形与化归。

在中学数学中, 我们能够构造的数学模型包括方程, 函数, 数列, 复数, 对偶式, 三角形等。而主要的构造解题思路又包括类比构造, 直觉构造, 归纳构造, 逆向构造, 联想构造等。这些常用的数学构造模型以及解题思路对学生在以后的解题中具有很大的作用, 有助于培养学生活跃的数学思维以及浓厚的数学兴趣, 提高学生的问题分析能力和数学解题能力, 加强学生对已有知识的理解与掌握。

5.2 论题展望

笔者建议, 在今后的数学教学中, 教师可尝试多为学生讲述能够一题多解的题目, 逐步培养学生的发散性思维和创造性思维, 使学生体会到对于一道题目具有多种构造性的解法。构造法在数学分析中的使用尤为广泛, 在中学阶段让学生初步接触有关构造法的题目, 有助于培养学生的数学思维。

参考文献:

- [1]程宏咏. 构造法在三角函数中的应用[J]. 数学通讯, 2008(2,4): 9-11.
- [2]樊友年. 构造法解数列综合题[J]. 中学数学教学参考, 2002(7): 38-40.
- [3]张之清. 巧用构造法证明不等式[J]. 唐山高等专科学校学报, 2000(13,4): 11-13.