运用数学建模思想解决物理问题

◆罗明华

（浙江省台州市外国语学校　318000）

建模思想广泛应用于物理教学，特别是一些习题的处理上，我们经常会根据题目思想建立物理模型，然后结合相关的数学知识，应用数学模型解决物理问题。其中极值问题在物理教学中是常见的一类问题，对于此类问题，如果能把一些数学模型应用到物理中去，处理此类问题往往能达到事半功倍的效果。

在求解极值过程中实际物理过程与数学知识相结合，充分发挥数学的作用，进行数学建模，求解数学极值，从而转化为物理问题的极值。数学建模就是用数学语言描述实际现象的过程，对物理规律或物理概念的描述提供了最简洁、最准确的表达方式，而且在内容上能表述得深刻、精确、简捷。

求解数学极值问题，中学物理通常涉及到的主要数学知识有：点到直线的距离最短、基本不等式法、二次函数求极值的方法、三角函数的知识等。下面本人来谈谈将数学如何结合到物理问题中去。解题思路如下：

物理问题→建立物理模型→结合数学模型→推理演算数学模型→得出物理问题的解

一、点到直线的距离最短与物理问题的结合

有关涉及位移、速度、加速度、力等矢量的问题，可运用矢量合成与分解的平行四边形定则建立由表示已知量与未知量的矢量构成的矢量三角形，运用三角形的知识进行求解与分析。

例 1：如图 1 所示，用细绳悬 AB 吊一质量为 m 的物体，现在 AB 中的某点 O 处再结一细绳用力 F 拉细绳，使细绳的 AO 部分偏离竖直方向的夹角为 θ 后保持不动，则 F 的最小值是多少？

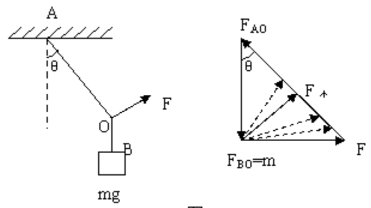


图 1

分析与求解：以 O 点为研究对象，则它在 AO 绳的拉力 FAO，BO 的拉力 FBO=mg，拉力 F 三个力的作用下处于静止状态，因此，这三个力相互平衡。这样，表示这三个力的矢量，首尾相接应该组成一个封闭三角形。由于绳 BO 对 O 点的拉力 FBO=mg 恒定不变，绳 AO 对 O 点的拉力方向不变。所以，当 F 方向变化时，由图 1 可以看出，当 F 方向与 AO 垂直时，F 最小，F=mgsin θ

二、均值不等式在解决物理问题中的应用

所谓不等式模型，就是根据题意或解题要求，就所求量和题中已知量建立起不等关系式，通过不等式的求解和分析，完成物理问题的求解。

如果 a，b 为正数，那么有：$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当 a=b 时，上式取“=”号。推论：①两个正数的积一定时，两数相等时，其和最小。②两个正数的和一定时，两数相等时，其积最大。

例 2：在电视节目中我们常常能看到一种精彩的水上运动——滑水板，如图 2 所示.运动员在快艇的水平牵引力作用下，脚踏倾斜滑板在水上匀速滑行，设滑板是光滑的.若运动员与滑板的总质量为 m=70 kg，滑板的总面积为 S=0.12 m2，水的密度为 ρ=1.0×103 kg/m3.理论研究表明：当滑板与水平方向的夹角（板前端抬起的角度）为 θ 时，水对板的作用力大小为 N = ρSv2sin2 θ，方向垂直于板面.式中 v 为快艇的牵引速度，S 为滑板的滑水面积，求为了使滑板能在水面上滑行，快艇水平牵引滑板的最小速度。

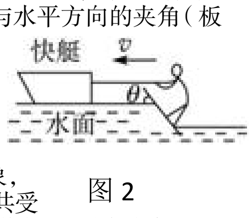


图 2

解析：选取滑板和运动员作为研究对象，对其受力分析如图 3 所示，滑板和运动员共受三个力的作用，即：重力 G，水对滑板的弹力 FN（方向与滑板板面垂直）及绳子对运动员的拉力 F。

由物体的平衡条件可得：$F_N\cos\theta-mg=0$，

又由题中所给的理论模型：$F_N=\rho Sv^2\sin^2\theta$，

可得：$v=\sqrt{mg/\rho S\sin^2\theta\cos\theta}$ 由式中可知：快艇的最小速度只由 θ 决定。

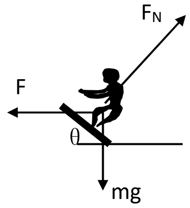


图 3

令 $y=\sin^2\theta\cos\theta$，则有：$y^2=\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin^2\theta(2\cos^2\theta)$

由基本不等式可得：$y^2\leq\frac{1}{2}(\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta+2\cos^2\theta}{3})^3$

当且仅当 $\sin^2\theta=2\cos^2\theta$，即 $\theta=\arctan\sqrt{2}=54.7°$ 时，y 有最大值：$y_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$。快艇最小速度的表达式为：$v_{\min}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}mg}{2\rho S}}$ 代入数据，得：$v_{\min}=3.9m/s$

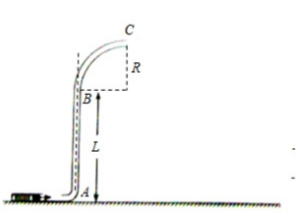
三、利用二次函数规律求物理极值的问题

把二次函数 y=ax²+bx+c 配方得 $y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，若 a>0，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有极小值：$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；若 a<0 时，则当当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有极大值：$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$。如果一个物理问题能建立 y=ax²+bx+c 的数学模型，就可以用上述方法求出其极值。

例 3：如图所示为某种弹射小球的游戏装置，水平面上固定一轻质弹簧及长度可调节的竖直管 AB.细管下端接有一小段长度不计的圆滑弯管，上端 B 与四分之一圆弧弯管 BC 相接，每次弹射前，推动小球将弹簧压缩到同一位置后锁定。解除锁定，小球即被弹簧弹出，水平射进细管 A 端，再沿管 ABC 从 C 端水平射出。已知弯管 BC 的半径 R=0.30m，小球的质量为 m=50g，当调节竖直细管 AB 的长度 L 至 L0=0.90m 时，发现小球恰好能过管口 C 端。不计小球运动过程中的机械能损失。

(1)求每次弹射时弹簧对小球所做的功 W；

(2)当 L 取多大时，小球落至水平面的位置离直管 AB 最远?



（1）当 L0 = 0.9.m 时，小球恰好能过管口 C 端，则 VC = 0，根据 A 到 C 应用动能定理:W−mg(L0+R)=0，则 W=mg(L0+R)=0.6J

（2）调节 L 到某值时，离开 C 点的速度为 VC，到水平而与 AB 最远。

根据 A 到 C 应用动能定理得:W−mg(L+R)=1/2mVC2

设小球水平抛出距离为 X，则 X=Vct，R+L=1/2gt2

解出 $x=\sqrt{2g(L0-L)(\frac{2(R+L)}{g}}=\sqrt{-4L^2+2.4L+1.08}$ 的表达式。

再根据数学抛物线的方程公式，当 L=−b/2a 时，X 取得最大值，得出当 L=0.3m 时，X 取得最大值。最后结果为 X+0.3，因为 X 为 C 点到落地点的水平距离，落地点到 AB 的距离还要再加 R。