向量模的最值问题典例剖析

◆李正顺

（浙江省温州市瓯海区三溪中学　325016）

向量是近代数学中重要的基本概念之一，有深刻的几何背景，是沟通代数、几何与三角函数的一种有力工具，有着极其丰富的实际背景，在数学和物理学科中也具有广泛的应用。所以向量成为每年高考的一个热点，向量模的最值问题更是热点中的热点，每年常考不衰，下面通过典型例题剖析与向量模的最值相关的几种问题。

1、以向量的相互关系为载体求向量模的最值

这是一种最常见的题型，此类问题一般是通过几个向量之间的某种关联做为已知，来求未知向量模的最值；请看下面问题：

例.已知$\vec{a},\vec{b},\vec{e}$是平面向量，$\vec{e}$是单位向量，若非零向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，向量$\vec{b}$满足$\vec{b}^2-4\vec{e}\bullet\vec{b}+3=0$，求$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值。

思路探求：本题是以向量为载体求相关向量模的最值问题，需要先确定向量a,b所表示的点的轨迹，一个为直线，一个为圆，再根据直线与圆的位置关系巧妙的实现问题的转化。

解：设$\vec{a}=(x,y),\vec{e}=(1,0),\vec{b}=(m,n)$

则由$\langle\vec{a},\vec{e}\rangle=\frac{\pi}{3}$得$\vec{a}\bullet\vec{e}=|\vec{a}|\bullet|\vec{e}|\cos\frac{\pi}{3},x=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},\therefore y=\pm\sqrt{3}x$，

由$\vec{b}^2-4\vec{e}\bullet\vec{b}+3=0$

得$m^2+n^2-4m+3=0,(m-2)^2+n^2=1,$

因此$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值为圆心$(2,0)$到直线$y=\pm\sqrt{3}x$的距离$\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$减去半径 1，为$\sqrt{3}-1$.

方法点睛：此类向量与函数、不等式、三角函数、曲线方程等相结合的综合问题；解决的关键是将问题进行合理的转化。可以通过向量的坐标运算，将问题转化为解方程、解不等式、求函数值域或直线与曲线的位置关系。

2、已知向量模的最值求参数的取值范围

求参数范围问题是各类考试的一个热点，以向量模的最值为背景更增加了题目的灵活性，如何将二者有机结合是解决此类问题的关键。请看下例，

例、在

ΔABC中，$AB=\sqrt{3},BC=2,\angle A=\frac{\pi}{2}$,如果不等式$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|$恒成立，求实数 t 的取值范围。

思路探求：从已知可以得出向量 AC 的模长，所以相当于左边向量模的最小值已知，只需将其平方，化为 t 的二次不等式即可解出 t 范围.

解：在直角三角形 ABC 中，易知 AC=1，$\cos\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

由$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|$,得$\overrightarrow{BA}^2-2t\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}+t^2\overrightarrow{BC}^2\geq\overrightarrow{AC}^2$,

即$2t^2-3t+1\geq 0$,解得$t\geq 1$或$t\leq\frac{1}{2}$

方法点睛：将已知合理变型，寻找已知与所求之间的联系是解决此类问题的核心所在。

3. 已知向量模长求向量模的最值

给出向量的模，求解其他向量模的最值是一种常见问题，这种问题只给出向量的模长，向量之间关系不明确。需要通过向量的运算来梳理，同时需要综合运用其他知识求解，请看问题；

例.已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，求$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值和最大值。

思路探求一：向量之间的没有直接的关系，所以需要创造条件来建立向量之间的联系，可以通过向量间的夹角实现二者的关联，同时解题过程需要三角函数知识做为基础。

解法一：设向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为θ，由余弦定理有$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta}=\sqrt{5-4\cos\theta}$，

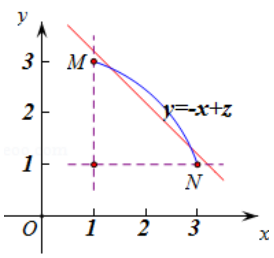
$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos(\pi-\theta)}=\sqrt{5+4\cos\theta}$，

则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{5+4\cos\theta}+\sqrt{5-4\cos\theta}$，

令$y=\sqrt{5+4\cos\theta}+\sqrt{5-4\cos\theta}$，则$y^2=10+2\sqrt{25-16\cos^2\theta}\in[16,20]$，据此可得：$\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\right)_{\max}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，$\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\right)_{\min}=\sqrt{16}=4$，即$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值为 4，最大值为$2\sqrt{5}$.

思路探求二：注意到相关量的几何特征，可以通过数形结合及线性规划求向量模的最值。

解法二记$\angle AOB=\alpha$，则$0\leq\alpha\leq\pi$，由余弦定理可得：$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{5-4\cos\theta}$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{5+4\cos\theta}$，令$x=\sqrt{5-4\cos\theta}$，$y=\sqrt{5+4\cos\theta}$，则$x^2+y^2=10(x,y\geq 1)$，其图象为一段圆弧$MN$，如图，令$z=x+y$，则$y=-x+z$，



则直线$y=-x+z$过M、N时z最小为$z_{min}=1+3=3+1=4$，当直线$y=-x+z$与圆弧MN相切时z最大，由平面几何知识易知z_{max}即为原点到切线的距离的$\sqrt{2}$倍，也就是圆弧MN所在圆的半径的$\sqrt{2}$倍，所以$z_{max}=\sqrt{2}\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}$. 综上所述，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值为 4，最大值为$2\sqrt{5}$.

方法点睛：这类问题通常涉及的知识面较广，解决问题时可能会利用函数的最值及其几何意义，数形结合能力，余弦定理、线性规划等基础知识，需通过解题进行方法的积累。

4. 已知向量数量积求模的最值

数量积是向量的一种基本运算，无论是在代数还是几何方面都有广泛应用，通过向量的数量积，可以求向量间的夹角，可以求向量的模长，也可以证明平行与垂直问题，通过数量积做为载体求向量模的最值也是常用的方法，请看下题：

例、已知$\vec{e}_1,\vec{e}_2$是空间单位向量，$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\frac{1}{2}$，若空间向量$\vec{b}$满足$\vec{b}\cdot\vec{e}_1=2,\vec{b}\cdot\vec{e}_2=\frac{5}{2}$，且对于任意$x,y\in R$，$\left|\vec{b}-(x\vec{e_1}+y\vec{e_2})\right|\geq\left|\vec{b}-(x_0\vec{e_1}+y_0\vec{e_2})\right|=1(\overrightarrow{x_0,y_0\in R})$，求$x_0,y_0,\left|\vec{b}\right|$

思路探求：由题意和数量积的运算可得$<\overrightarrow{e_1}\bullet\overrightarrow{e_2}>=\frac{\pi}{3}$，不妨设$\overrightarrow{e_1}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{e_2}=(1,0,0)$，由已知可解$\vec{b}=(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)$，可得$|\vec{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}|^2=(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$，由题意可得当 $x=x_0=1$，$y=y_0=2$ 时，$(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$取最小值 1，由模长公式可得$|\vec{b}|$.

解：∵ $\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_2}|\cos<\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}>=\cos<\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}>=\frac{1}{2}$，

∴ $<\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}>=\frac{\pi}{3}$，不妨设$\overrightarrow{e_1}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{e_2}=(1,0,0)$，$\vec{b}=(m,n,t)$，

则由题意可知$\vec{b}\cdot\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n=2$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{e_2}=m=\frac{5}{2}$，解得 $m=\frac{5}{2}$，$n=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\vec{b}=(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)$，

∵$\vec{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})=(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x-y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ t)$，

∴$|\vec{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})|^2=(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x-y)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2+t^2$

$=x^2+xy+y^2-4x-5y+t^2+7=(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$，

由题意当 $x=x_0=1$，$y=y_0=2$ 时，$(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$ 取最小值1，

此时 $t^2=1$，故 $|\vec{b}|=\sqrt{(\frac{5}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+t^2}=2\sqrt{2}$

方法点睛：本例巧妙的利用空间向量的坐标将看似非常复杂，关系错乱的向量之间联系起来，通过坐标运算实现了问题向简单转化。

5、已知向量模的最值求数量积（数量积的最值）

这是与上面类型相反的一种问题，需要将已知的向量模的最值进行合理变化，找到最值与数量积之间的关系，举例如下：

例、已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$.若对任意单位向量 $\boldsymbol{e}$，均有$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant\sqrt{6}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的最大值是________.权所

思路探求一：根据向量三角形不等式的关系以及向量数量积的应用进行计算即可得到结论.

解：∵$|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|=|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}|\leqslant|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|\leqslant\sqrt{6}$，

∴$|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|\leqslant|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant\sqrt{6}$，平方得：$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant6$，

即 $1^2+2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant6$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant\frac{1}{2}$，故$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值是$\frac{1}{2}$.

思路探求二：可以将相关向量坐标化，再利用三角函数的最值求出数量积的最值。

解：令 $\vec{e}=(1,0),\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\vec{b}=(2\cos\beta,2\sin\beta)$，则由 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant\sqrt{6}$，可得$|\cos\alpha|+2|\cos\beta|\le\sqrt{6}$.

（1）令 $\sin\alpha+2\sin\beta=m$（2）

（1）^{2}+（2）^{2} 得：$4[|\cos\alpha\cos\beta|+\sin\alpha\sin\beta]\le1+m^2$ 对一切实数α,β恒成立，所以 $4[|\cos\alpha\cos\beta|+\sin\alpha\sin\beta]\le1$，故

$\vec{a}\bullet\vec{b}=2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\le2$

$[|\cos\alpha\cos\beta|+\sin\alpha\sin\beta]\le\frac{1}{2}$

方法点睛：此类题目主要考查平面向量数量积的应用，根据绝对值不等式的性质以及向量三角形不等式的关系是解决本题的关键．综合性较强，有一定的难度.

6、以解析几何为背景的向量模的最值

向量在解析几何问题中出现，多用于“包装”解决此类问题的关键是利用向量的意义、运算脱去“向量外衣”，导出曲线上点的坐标之间的关系，从而解决有关最值问题。

例、已知动点P(x,y)在椭圆上 C $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上，F 为椭圆 C 的右焦点，若点 M 满足$|\overrightarrow{MF}|=1$且$\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MF}=0$，求$|\overrightarrow{PM}|$的最小值。

思路探求：由已知可知 M 的轨迹是园，数量积为零则给出了直角三角形，结合椭圆焦半径范围可解要求最值。

解：由椭圆的方程知其右焦点 F 为（3，0）因为$|\overrightarrow{MF}|=1$，所以点 M 的轨迹是以 F 为园心，1 为半径的园，由于$\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MF}=0$，所以 $MP\perp MF$，在 RtΔPMF中，

$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{|\overrightarrow{PF}|^2-|\overrightarrow{MF}|^2}=\sqrt{|\overrightarrow{PF}|^2-1}$，由于点 P（x,y）在椭圆上，所以 $a-c\le|PF|\le a+c$，即$|PF|\in[2,8]$,所以$\sqrt{3}\le|\overrightarrow{PM}|\le3\sqrt{7}$可知$|\overrightarrow{PM}|$的最小值为$\sqrt{3}$

方法点睛：解析几何中这种向量模的最值问题大量存在，只有在熟悉解析几何的基础上才能灵活处理。解题中注意各条件之间的联系，合量利用有关图形的几何性质。另外在立体几何同样也会遇到这种向量模的最值问题，在此不再展开。

以上所论述的是向量模的最值的常见题型，实际上，向量模的最值问题远远不止这些，本文只想通过这几种题型的介绍，起到一个抛砖引玉的作用，有许多不足之处希望各位专家与同行们加以批评与指正。

反馈练习：

1、设 e_1，e_2为单位向量，非零向量 $b=xe_1+ye_2$，x，$y\in$R. 若 e_1，e_2的夹角为$\frac{\pi}{6}$，则$\frac{|x|}{|b|}$的最大值等于______.

2、已知平面向量$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$（$\vec{\alpha}\neq\vec{0}$，$\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$）满足$|\vec{\beta}|=1$，且$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}-\vec{\alpha}$的夹角为 120°，求$|\vec{\alpha}|$的取值范围.

3、已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是平面内两个互相垂直的单位向量，若向量$\vec{c}$满足（$\vec{a}-\vec{c}$）•（$\vec{b}-\vec{c}$）=0，求$|\vec{c}|$的最大值

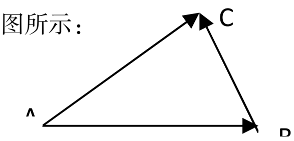
4. 已知向量$\vec{a}\neq\vec{e}$，$|\vec{e}|=1$，对任意 $t\in$R，恒有$|\vec{a}-t\vec{e}|\geqslant|\vec{a}-\vec{e}|$，求证$\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$

答案：

1、解：$\frac{|x|}{|b|}=\frac{|x|}{\sqrt{(xe_1+ye_2)^2}}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}{x^2}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{\sqrt{3}y}{x}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$，所以$\frac{|x|}{|b|}$的最大值为 2

2、解：令用$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$、$\overrightarrow{AC}=\vec{\beta}$，如图所示：



则由$\overrightarrow{BC}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$，

又∵$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}-\vec{\alpha}$的夹角为 120°

∴∠ABC=60°

又由 AC=$|\vec{\beta}|$=1

由正弦定理$\frac{|\vec{\alpha}|}{\sin C}=\frac{|\vec{\beta}|}{\sin60°}$得：$|\vec{\alpha}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin C\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ∴$|\vec{\alpha}|\in(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$

故$|\vec{\alpha}|$的取值范围是$(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$

3、解：∵ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

∵ $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0\Rightarrow|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta$，

∴ $|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$，∵$\cos\theta\in[-1,1]$，

∴ $|\vec{c}|$的最大值是$\sqrt{2}$.

说明本题也可以利用数形结合求解，$\vec{a}$，$\vec{b}$对应的点 A，B 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，$\vec{c}$对应的点 C 在圆 $x^2+y^2=2$ 上即可.

4、证明：由$|\vec{a}-t\vec{e}|\geqslant|\vec{a}-\vec{e}|$得 $\vec{a}^2-2t\vec{a}\bullet\vec{e}+t^2\vec{e}^2\ge\vec{a}^2-2\vec{a}\bullet\vec{e}+\vec{e}^2$，

即，$\vec{e}^2t^2-2\vec{a}\bullet\vec{e}t+2\vec{a}\bullet\vec{e}-\vec{e}^2\ge0$，$\because t\in R\therefore\Delta\le0$ 即 $4(\vec{a}\bullet\vec{e})^2-4\vec{e}^2(2\vec{a}\bullet\vec{e}-\vec{e}^2)\le0$，

所以$(\vec{a}\bullet\vec{e}-\vec{e}^2)^2\le0$，$\therefore\vec{a}\bullet\vec{e}-\vec{e}^2=0$，即$\vec{e}\bullet(\vec{a}-\vec{e})=0$，

∴ $\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$。