浅谈抛物线中的斜率问题

◆刘瑞龙

（武汉市第二中学高三（5）班　430010）

摘要：抛物线中的斜率有着特殊的表达形式和性质，并可用来解决复杂的定点问题。本文探究了抛物线中如何运用技巧解决定点相关的动直线、定点弦等问题，以及它们与斜率的和、积、商的关系，对这一类问题中的方法和结论做出了归纳，并对圆锥曲线中的一般情况作出猜想。

关键词：抛物线；斜率；定点；圆锥曲线

抛物线作为圆锥曲线的一种，因其独特的表达形式而使其中的斜率问题具有特别的方法、技巧，从而使与之相关的许多问题可化繁为简，又别具研究趣味。

一、斜率的表达

我们在此将抛物线与椭圆的性质进行对比：

1.抛物线：在 $y^2=2px$ 上 $(p>0)$ 有 A、B 两点，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，则：

$$\begin{cases} {y_1}^2=2px_1 \\ {y_2}^2=2px_2 \end{cases} ①②$$

将①–②得：$(y_1+y_2)(y_1-y_2)=2p(x_1-x_2)$

移项：$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$

我们注意到：$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ $\therefore k_{AB}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$

则我们可得出：对于抛物线上两点 M、$N(x_M\neq x_N)$，$k_{MN}=\dfrac{2p}{y_M+y_N}$

2、椭圆：在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，有 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

同样：$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1 \end{cases} ①②$$

由①–②：$\dfrac{{y_1}^2-{y_2}^2}{{x_1}^2-{x_2}^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，即：$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$

就有“点差法”，但无 k_{AB} 的表达

对比椭圆与抛物线，我们不难发现斜率的表达在抛物线中变得特殊，于是可解决这样一类定点问题。

例 1：过抛物线 $y^2=8x$ 上一点 $P(2,4)$ 任作两条相互垂直的弦 PA、PB，问：直线 AB 是否过定点。

解：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 且 $P(2,4)$

依上述结论 $$\begin{cases} k_{PA}=\dfrac{8}{y_1+4} \\ k_{PB}=\dfrac{8}{y_2+4} \end{cases} ①②$$

由 $PA\perp PB$：$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，将①②代入：$y_1y_2+4(y_1+y_2)+80=0$ ③

设：$l_{AB}:x=my+q$，将 l_{AB} 与 $y^2=8x$ 联立：$\begin{cases} y^2=8x \\ x=my+q \end{cases}$

$\therefore y^2-8my-8q=0$，由韦达定理 $\begin{cases} y_1+y_2=8m \\ y_1\cdot y_2=-8q \end{cases}$ ④⑤

将④⑤代入③中：$q=4m+10$

$\therefore l_{AB}$ 过定点 $(10,-4)$

例 2：（2017 全国 I 卷）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，四点 $P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，中恰有三点在椭圆上。

求 C 的方程

设 l 不经过 P_2 点且与 C 交于 A、B 两点，若直线 P_2A 与直线 P_2B 斜率之和为 −1，证明：l 过定点

解：（1）$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）①当 k 不存在时：设 $l:x=m$

$A(m,y_A)$ $B(m,-y_A)$

$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\dfrac{y_A-1}{m}+\dfrac{-y_A-1}{m}=-\dfrac{2}{m}=-1$

$\therefore m=2$ 此时 l 过右顶点，不满足

②当 k 存在时，设 $l:y=kx+b(b\neq1)$

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases} y=kx+b \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$ $\therefore (1+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-4=0$

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-8kb}{1+4k^2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4b^2-4}{1+4k^2} \end{cases}$ $\therefore k_{P_2A}+k_{P_2B}=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=-1$

化简得：$\dfrac{8k(b-1)}{4(b+1)(b-1)}=-1$，又 $b\neq-1$

$\therefore b=-2k-1$，此时：$\Delta=-64k$，存在 k 使 $\Delta>0$ 成立

$\therefore l:y=kx-2k-1$ 过定点 $(2,-1)$

计算结果进一步证实了我们的猜想。

定点弦的斜率

对于 $y^2=2px(p>0)$，在 x 轴正半轴上有一定点 $T(t,0)$，过其作弦 AB，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

设：$l_{AB}:x=my+t$，则：$y^2-2pmy-2pt=0$

$\therefore y_1\cdot y_2=-2pt$ 为一定值

运用此结论，我们可解决一些更为复杂的问题。