论二次曲线系中的双直线问题

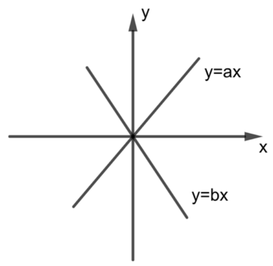
◆王隆祥

（武汉市第二中学高三 2 班　430010）

摘要：双直线是二次曲线的一种，可用一个方程来表示两条直线。在解决与直线相交问题时，双直线可被当成与二次曲线相交，整体带入求解，从而用来简单快速地求解两点间距离和四点共圆等问题，避免繁琐大量的计算。

关键词：二次曲线系；双直线；两点间距离；四点共圆问题

二次曲线也称圆锥曲线或圆锥截线，是直圆锥面的两腔被一平面所截而得的曲线，我们把这些曲线称为二次曲线系。二次曲线有很多种类，包括圆、椭圆、双曲线、抛物线，现在再为读者介绍一种——双直线。



根据集合的思想,我们可以用一个方程表示这两条直线:

$l_1: y=ax \Rightarrow y-ax=0$

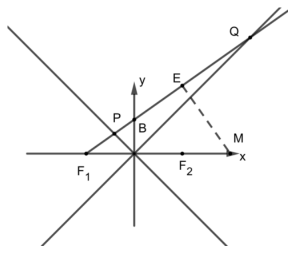
$l_2: y-bx=0$

$l_1 \cup l_2: (y-ax)(y-bx)=0$

在双直线与直线相交时，可以当成与二次曲线相交，整体代入更为迅速。

例 1：F_1、F_2分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左右焦点，B 为虚轴的端点，l_{F_1B} 与 C 的两条渐近线分别交于 P、Q，线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 M，若 $|MF_2|=|F_1F_2|$，则 C 的离心率?

由上方知识，我们将两条渐近线写成二次曲线



$l_1: y-\dfrac{b}{a}x=0 \qquad l_2: y+\dfrac{b}{a}x=0$

$l_1 \cup l_2: b^2x^2-a^2y^2=0$

$l_{F_1B}:=\dfrac{x}{-c}+\dfrac{y}{b}=1 \Rightarrow y=\dfrac{b}{c}x+b$

$$\begin{cases} b^2x^2-a^2y^2=0 \\ y=\dfrac{b}{c}x+b \end{cases}$$

整理 $\dfrac{b^2}{c^2}x^2-\dfrac{2a^2}{c}x-a^2=0$

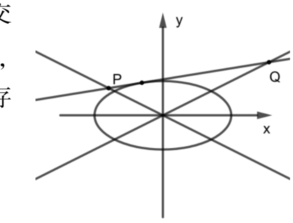
PQ 中点坐标 $H(\dfrac{a^2c}{b^2},y_{PQ}) \qquad y_{PQ}=\dfrac{c^2}{b^2}$

由 $|MF_2|=|F_1F_2|$，$M(3c,0)$

$k_{MH}=\dfrac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{a^2c}{b^2}-3c}=\dfrac{bc}{a^2-3b}$，$\quad k_{MH}\cdot k_{PQ}=-1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{bc}{a^2-3b}-\dfrac{b}{a}=-1 \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}$

解得 $a^2=2b^2 \quad c^2=3b^2$，$\therefore e=\dfrac{a}{c}=\sqrt{\dfrac{2b^2}{3b^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

例 2：已知 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P、Q，若 l 总与椭圆有一公共点，$S_{\Delta OPQ}$ 的面积是否存在最小值？若存在，请求出最小值



①常规解法：$l: y=kx+m$

$$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+4y^2-16=0 \end{cases}$$

$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-16=0$

$\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-16)=0$

$\Rightarrow m^2=16k^2+4$

$\begin{cases} y=kx+m \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\dfrac{2m}{1-2k},\dfrac{m}{1-2k}\right)$

同理 $Q\left(\dfrac{-2m}{1-2k},\dfrac{m}{1+2k}\right)$

$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \qquad |PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_Q|$

$S_\Delta=|PQ|\cdot d\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}|m|\left|\dfrac{2m}{1-2k}+\dfrac{2m}{1+2k}\right|$

$=\left|\dfrac{2m^2}{1-4k^2}\right|=8\left|\dfrac{4k^2+1}{4k^2-1}\right|$

$k^2>\dfrac{1}{4}$ 时，$S_\Delta=8\times\left(1+\dfrac{2}{4k^2-1}\right)>8$

$0<k^2<\frac{1}{4}$ 时 $\quad S=8\times\left(\dfrac{4k^2+1}{1-4k^2}\right)=8\times\left(1+\dfrac{8k^2}{1-4k^2}\right)>8$

当 $k=0$ 时 $\Rightarrow$ 存在最小值 $S=8$

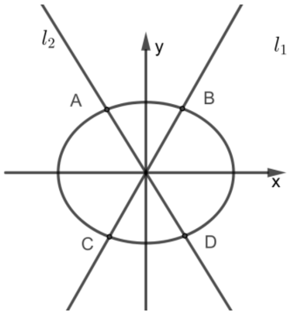
②二次曲线系: $l_1 \cup l_2: x^2-4y^2=0$

$$\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ y=kx+m \end{cases}$$

$(4k^2-1)x^2+8kmx+4m^2=0$

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|4k^2-1|}=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{2m}{4k^2-1}\right|$

二次曲线的做法简化了求两点距离的过程，直接整体算出，在算法上更为直接，然而双直线只是二次曲线系中的小插曲，它还有更好的应用。



我们可以总结如下规律：

$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$l_1: y=k_1x+m_1$

$l_2: y=k_2x+m_2$

A、B、C、D 同进满足三个方程，他们的轨迹可由双曲线与椭圆相加来表示，自然双曲线与椭圆前都有一个待定系数，如

$$n_1\left[y-(k_1x+m_1)\right]\left[y-(k_2x+m_2)\right]+n_2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

有