

培养创新思维 突破思维定式

——以一道几何题为例浅谈中学数学教学策略

◆陈丽娜

(广州市花都区新华街金华中学)

摘要：“一题多解”是立足不同角度，辩证分析问题，综合解决问题的有效方法，契合中学数学教学理念，对培养创新思维、提高教学成效有重要作用。但是，“一题多解”核心不在于拼凑解题方法，而在于既要构建思维体系，按图索骥求解，又要突破思维定式，独辟蹊径创新，形成既有“套路”又有“出路”的良好格局。本文以一道几何题为例，谈谈如何创新教学实践，培养学生发散思维和创新能力。

关键词：一题多解；创新思维；思维定式

通过教学实践，我发现中学生学习数学普遍存在“三会三不会”现象，即会死记硬背，不会活学活用，习惯于见过做过的不一定会，没见过做过的基本不会；会死搬硬套，不会融会贯通，习惯于套用公式，稍有变通就错漏百出；会囫圇吞枣，不会真学真懂，习惯于答案抄了，错题改了，下次碰到照错不误。这种机械化学习，容易挫伤学习积极性，陷入“读书死—死读书”的恶性循环，甚至形成谈“数”色变的心理阴影。要克服“旧题不熟、新题不会、变通不行”的机械化学习，推进数学教学由死记硬背、题海战术式的应试教育向融会贯通、举一反三的素质教育转变，重点在于既要构建思维体系，按图索骥求解，又要突破思维定式，独辟蹊径创新，激发学习热情，提高学习成效。

“一题多解”是数学教学的重要方法，对启发创新思维、巩固教学成效有着重要作用。《中学数学课程标准》强调要引导学生自主探索、自主创新，努力培养创新能力，鼓励开展启发性、发散式教学。然而，当前“一题多解”文章大多局限于罗列解题方法，有的罗列五、六种甚至十几种解法，好像“谁解法多，谁就能力强、水平高”，有些解法明显东拼西凑，滥竽充数，创新启发不够。因此，我们要辩证看待“一题多解”，既要梳理常规思路，顺藤摸瓜，又要突破思维定式，另辟蹊径。本文以一道几何题为例，将“一题多解”向“一题多思”延伸，努力实现既有“套路”又有“出路”的教学实践。

例题：如图1所示，在 $\triangle ABC$ 中，点D为AB中点， $AE \perp BC$ ，AE交CD于点F，若 $CE = \frac{1}{2}BD$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，求证： $DF = CF$ 。

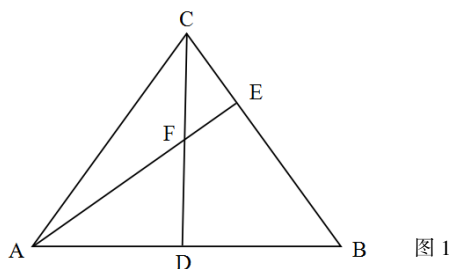


图1

套路一：几何证明法

几何证明法关键在于构建全等或相似图形，运用相关定理判断线线之间或夹角之间的关系。有时，现有条件无法直接构建全等或相似图形，可通过辅助线构建全等或相似图形。常见辅助线大体分为三类：平行线、延长线、等分线。

方法一：作“平行线”，构建全等或相似图形

解法一：过D做 $DG \parallel BC$ 交AE于G，在 $\triangle ABE$ 中证明 $DG = \frac{1}{2}BE$ ，并证明 $\triangle FGD \cong \triangle FEC$ ，得 $DE = DC$ 。

解：过D做 $DG \parallel BC$ 交AE于G，如图2所示

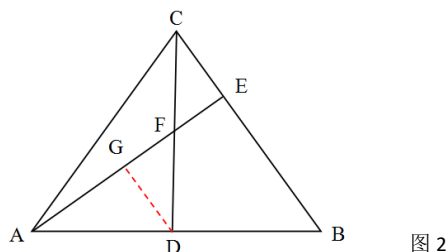


图2

$\because DG \parallel BC$, $AE \perp BC$, D为AB中点, $\angle B = 60^\circ$

$\therefore DG = \frac{1}{2}BE$, $BD = BE$

$\therefore CE = \frac{1}{2}BD$, $\therefore DG = CE$,

$\because DG \parallel BC \therefore \angle FDG = \angle FCE$

又 $\because DG = CE$, $\angle DFG = \angle CFE$

$\therefore \triangle FGD \cong \triangle FEC$, 则 $DF = CF$ 。

方法二：作“延长线”，构建全等或相似图形

解法二：延长AE于G，使得 $CG \parallel AB$ ，构造 $\triangle EAB \sim \triangle EGC$ ，

证明 $CG = \frac{1}{2}AB$ ，得 $CG = AD$ ，再证明 $\triangle ADF \cong \triangle GCF$ ，得 $DF = CF$ 。

解：延长AE于G，使得 $CG \parallel AB$ ，如图3所示

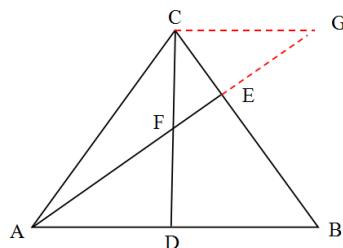


图3

$\because AE \perp BC$, D为AB中点, $\angle B = 60^\circ$

$\therefore AD = BD = BE$,

$\therefore CE = \frac{1}{2}BD \therefore CE = \frac{1}{2}BE$

$\because CG \parallel AB$, $\therefore \triangle ABE \sim \triangle GCE$,

又 $\because CE = \frac{1}{2}BE$, $\therefore CG = \frac{1}{2}AB = AD$

$\because CG \parallel AB$, $\therefore \angle DFA = \angle CFG$, $\angle FAD = \angle FGC$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle GCF$, 则 $DF = CF$

解法三：延长CD于G，使得 $BG \parallel AE$ ，通过构造 $\triangle DAF \cong \triangle DBG$ 得 $FD = DG$ ，因为 $\triangle CEF \sim \triangle CBG$ ，得 $DF = CF$ 。

解：延长CD于G，使得 $BG \parallel AE$ ，如图4所示

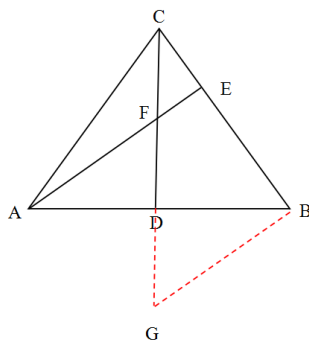


图4

$\because D$ 为 AB 中点, $\therefore AD=BD$
 $\because BG \parallel AE \therefore \angle FAD = \angle GBD$
 $\therefore \angle FDA = \angle GDB$
 $\therefore \triangle DAF \cong \triangle DBG, DF=DG=\frac{1}{2}GF$
 $\because AE \perp BC, D$ 为 AB 中点, $\angle B=60^\circ$
 $\therefore BD=BE$
 又 $\because CE=\frac{1}{2}BD \therefore CE=\frac{1}{2}BE$
 $\therefore BG \parallel AE$
 $\therefore \triangle CEF \sim \triangle CBG$, 则 $CF=\frac{1}{2}GF=DF$ 。

方法三: 作“等分线”, 构建全等或相似图形

解法四: 延长 BA 至 G , 使得 $GA=AD$, 通过平行线等分线段定理证明 $AE \parallel CG$, 又因为 A 为 GD 中点, 得 F 为 CD 中点。

解: 延长 BA 至 G , 使得 $GA=AD$, 如图 5 所示

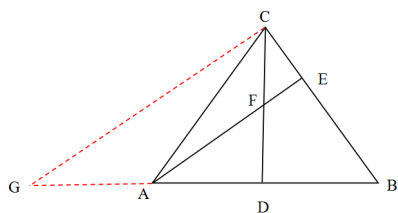


图 5

$\because D$ 为 AB 中点, $\therefore GA=\frac{1}{3}GB$
 $\because AE \perp BC, D$ 为 AB 中点, $\angle B=60^\circ$
 $\therefore AD=BD=BE$,
 $\because CE=\frac{1}{2}BD \therefore CE=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{3}BG$
 $\therefore GA=\frac{1}{3}BG, CE=\frac{1}{3}BG$
 $\therefore AE \parallel CG$
 $\because GA=AD \therefore CF=FD$

套路二: 代数求解法

代数求解法关键在于将线长与夹角用代数表示, 通过比较确定相互关系。在构建代数关系时要用辅助线构建全等或相似图形。以下以作平行线为例进行说明, 其他辅助线参照使用。

方法四: 作平行线, 构建代数关系式

解法五: 过 D 做 $DG \parallel AE$ 交 BC 于 G , 设 $CE=x$, 则 $CE=EG=GB=x$ 。利用直角三角形性质计算各线数值。

解: 过 D 做 $DG \parallel AE$ 交 BC 于 G , 如图 6 所示

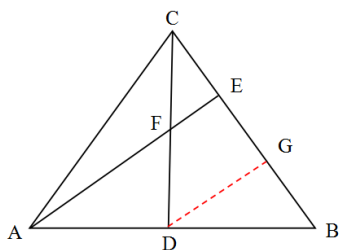


图 6

设 $CE=x$,
 $\because DG \parallel AE, D$ 为 AB 中点,
 $\therefore BG=EG=\frac{1}{2}BE$
 $\because AE \perp BC, D$ 为 AB 中点, $\angle B=60^\circ$
 $\therefore AD=BD=BE$,
 $\therefore CE=\frac{1}{2}BD$
 $\therefore CE=\frac{1}{2}BE=EG$, 则 $AD=BD=2CE=2x, CE=EG=BG=x$
 在 $Rt\triangle BDG$ 中, $\angle B=60^\circ, BD=2x, BG=x \therefore DG=\sqrt{3}x$
 在 $Rt\triangle CDG$ 中, $CG=2x, DG=\sqrt{3}x \therefore CD=\sqrt{7}x$,

又 $\because DG \parallel AE, CE=EG$

在 $Rt\triangle CEF$ 中, $EF=\frac{1}{2}DG=\frac{\sqrt{3}}{2}x, CE=x$

$\therefore CF=\frac{\sqrt{7}}{2}x=\frac{1}{2}CD$, 则 $CF=FD$

出路法: 反证法

当遇到代数求解或几何证明都行不通或很繁琐时, 可另辟蹊径, 用反证法寻找矛盾, 反证假设的不合理性。利用反证法时可用辅助线寻找矛盾。以下作平行线进行说明。

方法五: 作平行线, 寻找矛盾关系

解法六: 过 F 做 $FG \parallel AB$ 交 BC 于 G , 假设 $CF \neq DF$, 利用相似三角形性质证明 $CG=BG$, 进而证明 $CF=DF$, 说明假设不成立。

解: 过 F 做 $FG \parallel AB$ 交 BC 于 G , 如图 7 所示

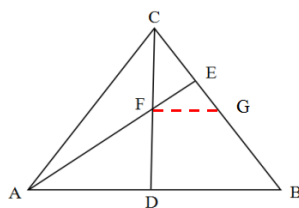


图 7

假设 $CF \neq DF$

$\because FG \parallel AB, \therefore G$ 不是 BC 中点, 即 $CG \neq BG$,

设 $CE=a, EG=b, BG=c$,

$\because AE \perp BC, D$ 为 AB 中点, $\angle B=60^\circ$

$\therefore AD=BD=BE$,

同理, 在 $Rt\triangle EFG$ 中, $FG=2EG=2b$

$\therefore CE=\frac{1}{2}BD$

$\therefore CE=\frac{1}{2}BE$, 则 $BD=BE=2a, b+c=2a$ ①

$\because FG \parallel AB$, 所以 $\triangle CFG \sim \triangle CDB$, 则

$\frac{FG}{BD} = \frac{CG}{BC}$, 即 $\frac{2b}{2a} = \frac{a+b}{a+b+c}$ ②

由①②可知, $a=2b, c=3b$

$\therefore a+b=c$, 即 $CG=BG$

$\because FG \parallel AB \therefore CF=DF$ 与假设矛盾, 则假设不成立, 即 $CF=DF$

以上罗列的只是部分解题方法, 起到抛砖引玉作用。本文重点不在于罗列所有解题方法, 而在于既梳理常规解题的思维体系, 又寻求突破思维定式的特殊技巧, 不断强化数学思想、创新思维, 从本质上、宏观上理解数学内涵, 规避题海战术, 提高教学成效。只要在教学实践中注重培育创新思维, 由积累解题方法向构建思维体系上转变, 学生的学习热情、思维层次、学习成绩就能有一个质的飞跃。

参考文献:

- [1]朱天元, 王辉, 许定璜. 初中数学一题多解大全[M]. 湖北教育出版社, 2010.8.
- [2]高保明. 数学教学与科学思维能力培养[M]. 北京: 北京教育出版社, 2009.

