一类高阶高次递推数列的通项解

◆龙俊泽　王飞鸿　姬红霞　哈世强

（陕西师范大学）

摘要：数列可以看作函数的一个离散分支，数列的一些性质可以看成是函数的特殊形式.而函数的实质就是恒等，因而一些递推公式其实可以通过函数恒等式来寻找其通项解。由于实际生活中对于现象的描述未必是确定的（随机性），因而数列不必完全确定下来，只需要满足现象的描述即可。本文利用恒等构造法对递推数列展开讨论，研究一类高阶高次递推数列的可能通项解。

关键词：高阶高次递推式；恒等构造法；可能通项解

1.引言：

高阶高次递推公式，这些递推公式看似很复杂，但其实都可以经过适当的变换成为已知的一些递推公式，进而能够对其求解.

2.恒等构造法

2.1 简单二阶二次递推式

例 1：已知某一递推数列$a_{n+1}=a_n^2-2$，其中$a_1=\frac{5}{2}$试求其通项公式？

解析：不妨令$a_n=b_n+\frac{1}{b_n}$，其中 $b_1=2$，那么$b_{n+1}+\frac{1}{b_{n+1}}=b_n^2+\frac{1}{b_n^2}$，对比函数形式，容易得到

$b_{n+1}=b_n^2=b_{n-1}^4=b_{n-2}^8=\cdots=b_1^{2^n}=2^{2^n}$，

也即$b_n=2^{2^{n-1}}$，从而$a_n=b_n+\frac{1}{b_n}=2^{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}$.

这一解法是对$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2$这一恒等式的离散运用.

2.2 二项式递推式

由二项式展开式的恒等性，我们可以对其做更一般的推广，定义形如：

$b_n^{2k}=b_{2kn}+C_{2k}^1b_{2(k-1)n}+C_{2k}^2b_{2(k-2)n}+\cdots+C_{2k}^{k-1}b_{2n}+C_{2k}^k$

$b_n^{2k+1}=b_{(2k+1)n}+C_{2k+1}^1b_{(2(k-1)+1)n}+C_{2k+1}^2b_{(2(k-2)+1)n}+\cdots+C_{2k+1}^{k-1}b_{3n}+C_{2k+1}^kb_n$ 把 2k 的情况称作第一类二项式递推式，把 2k+1 的情况称作第二类二项式递推式，其中 k 取不同值的时候分别把递推公式称作第一、第二类二项元.这两类递推公式都可以有形如$a^n+\frac{1}{a^n}$的通项公式，其中 a 可由 b_1确定，$a=\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2-4}}{2}$，下面对其进行论证.

证明：

（1）考查第一类二项式展开式：

$\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^{2k}=\left(a_n^{2k}+\frac{1}{a_n^{2k}}\right)+C_{2k}^1\left(a_n^{2(k-1)}+\frac{1}{a_n^{2(k-1)}}\right)+C_{2k}^2\left(a_n^{2(k-2)}+\frac{1}{a_n^{2(k-2)}}\right)+C_{2k}^3\left(a_n^{2(k-3)}+\frac{1}{a_n^{2(k-3)}}\right)+\cdots+C_{2k}^{k-1}\left(a_n^2+\frac{1}{a_n^2}\right)+C_{2k}^k$

如果令$b_n=a_n+\frac{1}{a_n}$且满足$a_{kn}=a$，从而$b_{kn}=a_n^k+\frac{1}{a_n^k}$，那么就有如下恒等式：

$b_n^{2k}=b_{2kn}+C_{2k}^1b_{2(k-1)n}+C_{2k}^2b_{2(k-2)n}+\cdots+C_{2k}^{k-1}b_{2n}+C_{2k}^k$

我们可以对满足条件的 a_n递推公式讨论：$a_{kn}=a_n^k$

对两边同时取对数，于是可以得到$\ln a_{kn}=k\ln a_n$

由于只需要找出一个可行的数列关系式就可以得到所有的数列数值，所以可以选择$a_n=a^n$

这当然是符合条件的。

那么$b_n=a_n+\frac{1}{a_n}=a^n+\frac{1}{a^n}$就是满足的解.其中$a_1+\frac{1}{a_1}=b_1$，可以解得 $a=\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2-4}}{2}$.

(2) 再考查第二类二项式展开式：$\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^{2k+1}=\left(a_n^{2k+1}+\frac{1}{a_n^{2k+1}}\right)+C_{2k+1}^1\left(a_n^{2(k-1)+1}+\frac{1}{a_n^{2(k-1)+1}}\right)+C_{2k+1}^2\left(a_n^{2(k-2)+1}+\frac{1}{a_n^{2(k-2)+1}}\right)+\cdots+C_{2k+1}^k\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$

令$b_n=a_n+\frac{1}{a_n}$且满足$a_{kn}=a_n^k$，从而$b_{kn}=a_n^k+\frac{1}{a_n^k}$可以得到$b_n^{2k+1}=b_{(2k+1)n}+C_{2k+1}^1b_{(2(k-1)+1)n}+C_{2k+1}^2b_{(2(k-2)+1)n}+\cdots+C_{2k+1}^{k-1}b_{3n}+C_{2k+1}^kb_n$

其中 a_n仍然是 a^n的形式，并由 b_1确定下来 a 的值.

2.3 形式化说明

下面对其进行举例论证：

例 2：$b_n^2=b_{2n}+2, b_1=2$,求解满足条件的某一 b_n的通项公式

解析：由于 b_n的系数满足二项式系数分配，因此可以令$b_n=a_n+\frac{1}{a_n}=a^n+\frac{1}{a^n}$因为$b_1=a_1+\frac{1}{a_1}=2$可以解得$a_1=1$

也就是说 b_n始终是 2,造成 b_n不变化的原因是 b_n的初值是 2，使得 b_n,bn’b_{3n}…不能跳出 2 的循环圈.

例 3：$b_n^2=b_{2n}+2, b_1=\frac{5}{2}$,求解满足条件的某一 b_n的通项公式

解析：由于 b_n的系数满足二项式系数分配，因此可以令$b_n=a_n+\frac{1}{a_n}=a^n+\frac{1}{a^n}$因为$b_1=a_1+\frac{1}{a_1}=\frac{5}{2}$可以解得$a_1=2$或$\frac{1}{2}$

那么$b_n=2^n+\frac{1}{2^n}$

例 4：$b_n^3=b_{3n}+3b_n, b_1=\frac{5}{2}$,求解满足条件的某一 b_n的通项公式.

解析：由于 b_n的系数满足二项式系数分配，因此可以令$b_n=a_n+\frac{1}{a_n}=a^n+\frac{1}{a^n}$因为$b_1=a_1+\frac{1}{a_1}=\frac{5}{2}$那么$a_1=2$或$\frac{1}{2}$，

同样的我们可以得到：$b_n=2^n+\frac{1}{2^n}$

2.4 数列的唯一性条件

比较例 3，例 4，他们的通项公式完全可以相同，但是递推式的选取可以不同，而例 3 只能得到 n=2k 的情况，而例 4 可以得到 n=2k+1 的情况.那么综合例 3，例 4 这一组递推公式就能够完全确定一个数列.

更一般的，任意分别取第一和第二类二项元所构成的递推数组，都可以得到一个完全确定的数列.在实际生活中，如果存在同时满足第一类和第二类的描述性数列，那么就可以立刻得到它的通项公式是$b_n=a_n+\frac{1}{a_n}=a^n+\frac{1}{a^n}$，其中$a=\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2-4}}{2}$.

3.总结：

应该将函数恒等式和数列递推式有机地结合起来，用恒等的思想去解决数列问题.如何用已知的恒等式去构造更多的数列，值得进一步地探究。