精选例题诱发学生思考，提供平台启迪创新思维

◆劳　锟
（广州市铁一中学　广东广州　510520）

数学课程改革强调通过观察、试验、猜想、验证、修正、再验证、得到结论并进行推广和应用，提供机会让学生的动手操作、实践探究，最终让学生在积极的思维参与中领悟数学的本质和核心。高中学生相对成熟，对问题往往都有自己的看法，具备自己的思维方式. 因而，教学过程中，教师应注意引发学生思考，给学生思维的空间，以培养他们的发散性思维与创新精神。因此，我力求在精选例题的同时，特别注重辅设途径,让学生不自觉的热情参与，充分调动学生的学习积极性，一点初浅做法如下。

一、用结果引发好奇，探究竞激发热情

教学的一个重要过程，就是激发学生兴趣，引导他们积极参与，这就需要老师提出的问题有吸引学生的地方. 首先力求学生投入其中，再设法让他们感到惊奇，甚至不可思议，这时就可以紧扣学生心弦，让他们在求知的过程中眉色飞舞.

例 1 关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$\{x|x<-2$ 或 $x>1\}$，求不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集.

如果老师直接数形结合,利用韦达定理引导出解法，学生虽能理解，但热情度不会太高，甚至会显得枯槕泛味。

若能换种方式，即利用同学还在冥思苦想，而不得结果时，老师却出呼意料地说，这道题太容易，只看一眼，便知道了解集为$\{x|-1<x<2\}$. 你弄懂了吗？

这太突然的结果让学生不可思议，探求知识的欲望被强烈点燃，使被动学习变成主动，晓有兴趣地围绕相应方程根的关系去探求问题的结果，总结出方程 $ax^2+bx+c=0$ 与方程 $ax^2-bx+c=0$ 中的根互为相反数，且注意到 $a<0$，因而可很快地写出解集. 如此，再补充其它解法，则效果明显胜一筹。

在此基础上，可进一步考察学生的观察问题的能力，引出练习：

已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\{x|\alpha<x<\beta\}$，其中$\beta>\alpha>0$，求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

若能注意到方程的$ax^2+bx+c=0$与方程$cx^2+bx+a=0$的根互为倒数，难道还写不出不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集吗？

二、抓特点诱发诧异，引猜想寻求途径

解题时，首先是对题的观察和审视，从中捕捉相关信息，教师若能在题中让学生抓住较为特殊（或有特色）的某一部分，引发学生的好奇，包括观察数量与数量间的关系，图形与图形间的关系，以及数量和图形间的关系。从而诱发学生对问题的看法与见解，引发猜想并积极去发现其规律。

例 2 已知对于任意的实数 x，有 $f(x+3)=-f(x)$，$f(1)=-2$，求 f(2017)的值.

该题有个特点，就是 f(2017)中的“2017”相对较大，这么大的数怎么可能与已知条件 $f(1)=-2$ 联系起来呢？可见 f(x)不是一般的函数，是什么函数？好奇心引发猜想.

当学生猜想出周期函数函数时？那么，由学生说明原因和理由的时刻到来，教师趁热打铁，围绕周期函数的定义，引发探讨高潮.

学生观察条件 $f(x+3)=-f(x)$，对比形式 $f(x+T)=f(x)$，发现“$-f(x)$”中的“－”大有学问，若能变负为正，则大功告成，利用“负负得正”，促使我们去尝试让负号出现两次。会算 $f(x+6)$吗？$f(x+6)=-f(x+3)$，从而不难探讨出 $f(x+6)=-f(x+3)=-[-f(x)]=f(x)$，从而求得函数的周期 6. 进行归纳，式子 $f(x+3)=-f(x)$，反映了此函数 $y=f(x)$有以下性质：当自变量相差 3 时，函数值是互为相反数。由此，容易得到当自变量相差 6 时，函数值相等，即此函数是周期为 6 的函数. 求出 $f(2017)=f(1)=-2$，在学生倍感惊讶的同时，推波助澜，提出：会求 f(2020)吗？f(5017)吗？

三、抓机会趁热打铁，引类比夯实基础

类比，是数学中的一个重要方法，是逻辑推理的重要组成部分。由此及彼，引发学生联想，不仅能调动学生的学习积极性，对巩固基础知识，也能得意想不到的效果。

老师不妨通过上述例子，试探提问“总结出了探求周期的方法了吗？”

在学生充满自信的前提下提出：若将条件变为“$f(x+3)=\frac{1}{f(x)}$，$f(1)=-2$”，你还能求得 f(2017)的值吗？

如此，可引发学生去积极尝试。当学生感到有困难时，老师不妨用激将法，说其并没有弄懂上述例题，如果弄懂了，怎么会不知道怎样演绎呢？

“会算 $f(x+6)$吗？”,通过类比，完全可得到相同结论。

当老师再提出：“$f(x+3)=\frac{1}{f(x)}$，$f(1)=-2$,求 f(2017)的值”时，学生已经是轻松自如，信心百倍。

如此，既引发出学生周期函数的猜想，同时又引发了对问题的探索和联想，学生兴趣盎然,培养了学生大胆探索的精神，尝试出证明周期函数的方法,更重要的是学生参与解决问题的积极性得到了充分体现，留下了难以忘却的记忆。

四、多角度引发思维，示演绎不断完美

实施好高中数学教学，既要驾驭好教材，丰富课堂内容，又要注重融洽课堂气氛，让课堂充满活力，富有生气. 这不仅需要教师在例题、习题上精心组合，做到“精雕细刻”，还需要教师在教学形式、教学方法仔细思考，能够“运筹帷幄”，给学生足够的空间，引导学生去探索发现.

例 3. 设 α 为锐角,若 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$,求 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})$的值.

该题的最大特点就是容易入手，老师若直接传授解题方法，难以改变学生的不以为然，即毫不犹预地展开 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{3}{5}$，为引起学生的高度注意，教师不妨顺其自然，让学生吃点苦头. 让他们在演绎的过程中经受挫折，更能体会那雨后彩虹的心情.

思路一：学生毫不犹预地展开 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{3}{5}$，联立 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，设法求得 cosα,sinα 的值，再求 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})$的值，理论上不存在任何问题，但解题过程有较大运算量。

此时，可略纠偏差，当并不时一步到位，即引诱学生可否找一种简单一点的方法来求得 cosα，sinα 呢？如此，不难导出思路二。

思路二：条件 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$,其实已经让我们看到了 cosα，∵ $\cos\alpha=\cos[(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})$，求得 cosα，sinα，cos2α，sin2α，利用此结果求 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})$的

值.

相对于思路一，思路二可以说收获颇多. 但还是有些不尽人意，有谁能提供好一点的解法吗？步步紧逼，箭在弦上，学生的思维被强烈点燃。

思路三：利用已知角的三角函数值，来求另一个角的三角函数值，应去观察角 $\alpha+\frac{\pi}{6}$、$2\alpha+\frac{\pi}{3}$是否存在某种关系. 若能发现 $2\alpha+\frac{\pi}{3}$是 $\alpha+\frac{\pi}{6}$的两倍，你会解答吗？学生跃跃欲试，利用二倍角公式，好的解题方法呼之欲出.

拉普拉斯曾说 “在数学里，发现问题的主要工具是归纳和类比”.在中学数学的解题教学中，通过介绍归纳和类比等思维方法，能启迪学生的解题思路,能激发学生的学习兴趣,能培养学生创新精神和实践能力。同时也让学生意识到，正确审题，善于观察和发现，可能起到意想不到的效果.

五、变形式逐步引深，比解法不断创新

例题的选择，应本着寻找好的切入点，循序渐进，以唤起学生不同的想法，各抒已见，无论对错，都有利于激发同学们的学习热情，激发学生的探索欲望，让他们养成从不同角度去分析和解决问题，培养良好的思维习惯.

例 4（1）已知 P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上一个动点，A(1，0)为圆内一点，Q 为 PA 的中点，求线段 PA 中点 Q 的轨迹方程.

求动点的轨迹方程，就是求动点(x,y)中的 x、y 的一种相依关系. 面对两个动点的关系，学生易联想到相关点法，从而发表自己的见解，易通过中点公式求得 P、Q 两点坐标的一种关系，较轻松地求得 Q 点的轨迹. 于是，在此基础上，将题变化为

（2）已知 P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上一个动点，A(1，0)为圆内一点，Q 在线段 PA 上，且$\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QA}$，求 Q 的轨迹方程.

在学生观察相关点 P、Q 时，发现与（1）并无区别，这就意味着解题的方向不变，那么，那方面发生了变化呢？学生不难看到，坐标之间的关系不能再用中点公式来转化，从而猜想，探求 P、Q 坐标之间的关系，其难度有可能加大，如此，既能看到问题的相同点，又能看到问题的不同点，又能激发学生的探索热情。此时，不妨再作一些解题方向上的变化.

（3）已知 P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上一个动点，A(1，0)为圆内一点，经过原点 O 作直线 PA 的垂线，垂足为 Q，求点 Q 的轨迹方程.

此时的 Q 点依然随着点 P 运动而运动，可否继续应用相关点法呢？学生的思维也会因此而展开，适当时指出向量的数量积为零（或斜率的积为－1），此时，老师再将问题转化到核心处。

（4）已知圆 $x^2+y^2=4$ 上一定点 B(1，1)为圆内一点，P，Q 为圆上的动点. 若∠PBQ＝90°，求线段 PQ 中点的轨迹方程.

有了上面的铺垫，面对问题，学生跃跃欲试，探讨中提出了以下几种想法：

法一：设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$，PQ 中点为 N（x,y）

BP⊥BQ,$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{QP}=0$，　$(y_1-1)(y_2-1)+(x_1-1)(x_2-1)=0$ ①

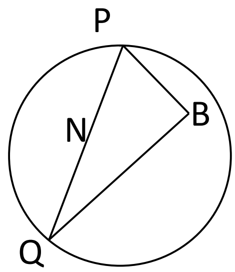
点 N 是 PQ 中点，$2x=x_1+x_2$ ②

$2y=y_1+y_2$ ③

P 在圆上，$x_1^2+y_1^2=4$ ④

Q 在圆上，$x_2^2+y_2^2=4$ ⑤

联立①②③④⑤，消去 x_1,x_2,y_1,y_2 即可得轨迹方程。



法二：设 BP、BQ 方程，联立求得 P、Q 的坐标，再利用 P 在圆上，Q 在圆上，BP⊥BQ，这三个几何位置关系转化为方程，联立消参即可得轨迹方程。

法三：设 PQ 的中点为 N(x，y)，

在 Rt△PBQ 中，|PN|＝|BN|，

设 O 为坐标原点，连接 ON，则 ON⊥PQ，

所以$|OP|^2=|ON|^2+|PN|^2=|ON|^2+|BN|^2$，

所以 $x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

故线段 PQ 中点的轨迹方程为 $x^2+y^2-x-y-1=0$.

在解题过程，调动学生的学习积极性尤为重要. 让学生从中体会到，通过猜想，可以发现问题和提出问题，进而解决问题，从而自觉地培养成这一重要的思维习惯。学生的这种积极乐观的态度，可以方便自己梳理解题方法，理顺解题思路，积累解题经验. 寻找问题与问题之间的本质联系，将一些数学思想、数学方法进行有效的整合，使分析、解决问题的能力上升到新的台阶.

参考文献：

[1][美]G.波利亚著.数学与猜想.科学出版社有限责任公司
[2]孔凡哲 曾峥 编著.数学学习心理学. 北京大学出版社

作者简介：劳锟，女，籍贯：广东，民族：汉，出生年月：1973 年 3 月，学位：学士，职称：中学数学一级教师研究方向：中学数学教育。