

例谈二轮复习中的“借题发挥”

◆何国锋

(东莞市第八高级中学 广东省东莞市 523629)

摘要: 解题教学是高考二轮复习的主要形式,其教学效果与高考数学备考成败直接相关。本文旨在打破就题论题的陈旧复习方式,通过充分挖掘,借题发挥,不断变式、拓展、延伸,使得学生的数学思维和能力得到充分的发展和优化,提高二轮复习的有效性。

关键词: 一题多解;发散思维;借题发挥;变式教学

高三二轮复习具有时间紧,任务重,难度大等特点。解题教学是这一轮复习中的主要课型,其复习效率在这一阶段就显得尤为重要。如何让解题教学达到高效是每一个高三老师都面临的问题。笔者认为,在二轮复习中,解题教学如果就题论题,就很难把题目的作用发挥到极致,学生的数学能力就很难得到充分发展,而且很容易让学生陷入题海战术,不仅如此,这种解题教学的课堂沉闷无趣,复习效果自然就事倍功半;但我们如果能精选例题并借题发挥,提高问题的“含金量”,充分发挥问题的功能,通过问题的一题多解、变式与拓展,使得学生的数学思维在一个问题的解决到另一个问题的解决过程中得到发展和优化,生跳出题海,实现减负增效,达到高效复习的目的。

1、通过借题发挥,一题多解,培养学生的发散思维

在美国教育家 G.波利亚所著的《怎样解题》中提到:在解题过程中,时刻提醒自己“能以不同的方式推到这个结果吗”,这其实就告诉我们,在解题教学过程,面对同一个问题,我们要能从多个角度进行分析,得到多种不同的解法,通过这种分析一方面可以激起思维的碰撞,活跃课堂;另一方面可以很好地培养学生的求异思维。

教学片段一:在一次二轮考试中有这样一道填空题:

题目 已知 P 为圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上一点,直线 $l: y = x - 2$, 则 P 到 l 的距离 d 的最小值为。

师:这是我们这次考试的一个填空题,大部分同学都做对了,但我们是如何做出来的呢?你所用到的原理是什么?

生 1: 垂线段最短

师:好,充分利用了几何法得出了最值,还有其它方法吗?

生 2: 设 $l': y = x + m$, 由 $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ 得, $2x^2 + 2(m-1)x + (m-1)^2 - 1 = 0$, 由得, $m = 1 \pm \sqrt{2}$, 求最小值, 所以, $m = 1 - \sqrt{2}$ 从而: $d_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$

师:你用到的原理是什么?

生 2: 利用了最值点处的切线与已知直线平行!

生 3: 利用生 2 的原理还有一种方法: 设最值点为 $Q(x_0, y_0)$, 则已知圆在 Q 点处的切线为 $x_0x + (y_0 - 1)(y - 1) = 1$, 其斜率为 $k = -\frac{x_0}{y_0 - 1}$, 由生 2 的原理有: $-\frac{x_0}{y_0 - 1} = 1$, 又因为 Q 点在圆上, 所以, $x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = 1$, 联立得出 Q , 进而求出最小值。

师:同学 2 充分利用了代数得出了最值,这其中还用到了圆上一点的切线方程,非常好,那还有其它方法呢?

生 4: 设 $P(\cos\theta, \sin\theta + 1)$, 则 P 到直线 l 的距离 $d = \frac{|\cos\theta - \sin\theta - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) + 3|}{\sqrt{2}}$, 所以, 当 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = -1$ 时, $d_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$

师:非常好,生 4 运用了圆的参数方程,将问题转为一个三

角函数的最值问题,利用函数的思想巧妙地解决了该问题。请大家尝试解决一下这样一道题:

已知 P 为椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上一动点,直线 $l: y = x - 2$, 则 P 到 l 的距离 d 的最小值为。

通过这种借题发挥,交流互动,一题多解,可以更加全面了解学生对数学的基本原理掌握的情况,在培养发散思维的同时,促进同学之间思维的碰撞,共同学习共同提高。

2、通过借题发挥,不断变式,深化学生对问题或方法本质的认识

借题发挥可以对原题的结构进行变式,即变换题目的条件或结论,或者变换题目的形式,而题目或方法的本质没有改变。通过这种借题发挥的教学,能使随时根据变化了的情况积极思考,设法想出解决办法,深化学生对问题本质的认识,培养学生的求同思维。

教学片段二:

变式 已知 P 为 $f(x) = \ln x$ 上一动点,直线 $l: y = x + 2$, 求 P 到 l 的距离 d 的最小值。

师:此题我只是将曲线换成了一个函数的图像,能用之前的方法解决吗?

生 5: 几何法和参数方程肯定不行,判别式法也不行。可以利用最值点处的切线与已知直线平行,设 $P(x_0, y_0)$, 则 $f(x) = \ln x$ 在 P 处切线的斜率为 $k = f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$, 则有: $\begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ \frac{1}{x_0} = 1 \end{cases}$, 从而

$x_0 = 1, y_0 = 0$, 所以, $d_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

师:很好,生 5 利用了几何法快速地得到了答案;有其它方法吗?能转化为函数的最值问题吗?

生 6: 好像可以, P 到 l 的距离 $d = \frac{|x_0 - y_0 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0 - \ln x_0 + 2|}{\sqrt{2}}$

师:如何求出最值呢

生 7: 设 $g(x) = x - \ln x$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减, 在 $(1, +\infty)$

递增, 当 $x_0 = 1$ 时, $g_{\max}(x) = 1$, 从而 $d_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

师:很好,刚才三位同学分别利用几何法和函数最值的方法,这两种方法可推广吗?请大家尝试解决一下一道题:

已知 P 为 $f(x) = x + \ln x$ 上一动点,直线 $l: y = 2x + 2$, 求 P 到 l 的距离 d 的最小值。

3、通过借题发挥,拓展与延伸,深化学生的思维灵活性

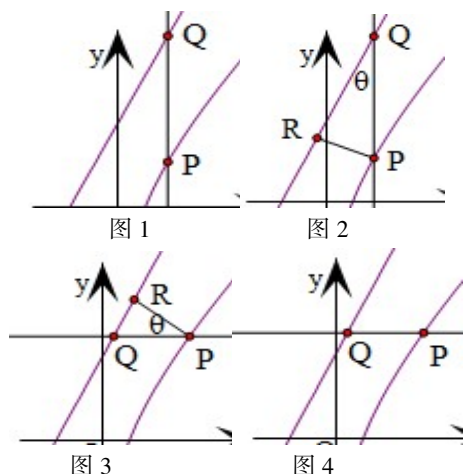
在二轮复习中,通过借题发挥,将问题进行更深入的研究,既可以培养学生的创新思维,又可以活跃课堂的气氛,避免沉闷、无生气的课堂。通过延伸可以很好地锻炼学生的思维灵活度,提高学生综合分析问题和解决问题的能力,从而提升二轮复习效率。

教学片段三:

延伸一 设直线 $x = t$ 与曲线 $f(x) = x + \ln x$ 和直线 $l: y = 2x + 2$ 分别交于 P, Q 两点,求 $|PQ|$ 的最小值。

师:大家可以先画出图像看看能否找到突破口

生 1: 由图 1: $|PQ| = (2x + 2) - (x + \ln x) = x - \ln x + 2$, 设 $g(x) = x - \ln x$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减, 在 $(1, +\infty)$ 递增, 所以 $g_{\min}(x) = g(1) = 1$, 故 $|PQ|_{\min} = 3$



师:生1通过观察图像,转化为函数最值问题,后利用导数进行了解决。还有其它的方法吗?大家可以联系前面所学的几何方法,它们之间有没有什么联系呢?

事实上,如图2我们过点P作 $PR \perp l$,设 $d = |PR|$,你能找到 d 与 $|PQ|$ 之间的关系吗?

生2: $|PQ| = \frac{|PR|}{\sin \theta} = \frac{d}{\sin \theta}$

师:有没有哪位同学进行一步补充?

生3:设倾斜角为 α ,则 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$,从而 $|PQ| = \frac{d}{\cos \alpha}$,又 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$,故 $|PQ| = \sqrt{5}d$

接下来只需用前面的方法就可以解决。

师:刚才,几位同学通过作一条垂线,很巧妙的把该问题转化为前面刚学过的问题了,非常棒!接下来我们再考一考大家:

延伸二 设直线 $y = a$ 与曲线 $f(x) = x + \ln x$ 和直线 $l: y = 2x + 2$ 分别交于P,Q两点,求 $|PQ|$ 的最小值。

生5:仿照上一题的思路,如图3作出 $PR \perp l$,设 $d = |PR|$,则 $|PQ| = \frac{|PR|}{\cos \theta} = \frac{d}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}d$,进而转化为前面的问题。

师:同学们触类旁通的能力很强啊,那大家能用代数方法解决这个问题吗?

生1:由图4,设 $P(x_2, a), Q(x_1, a)$,则 $|PQ| = x_2 - x_1$,接下来不知道怎么办了。

师:有没有同学可以帮帮他呢?问题的障碍在哪里?

生2:出现了两个变量,求不出来!

生3:可以求,因为 x_1, x_2 是有关系的: $a = 2x_1 + 2, a = x_2 + \ln x_2$,

所以 $x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + \ln x_2) - 1$

从而, $|PQ| = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - \ln x_2) + 1$,设 $g(x) = \frac{1}{2}(x - \ln x) + 1$, $g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x})$,则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 递减,在 $(1,+\infty)$ 递增,故 $|PQ|_{\min} = \frac{3}{2}$

师:非常棒,请大家课后共同探讨一下这个题:

设直线 $y = -x + m$ 与曲线 $f(x) = x + \ln x$ 和直线 $l: y = 2x + 2$ 分别交于P,Q两点,求 $|PQ|$ 的最小值。

4、结束语

利用这种借题发挥的方式组织高三二轮复习有助于学生更好更系统的理解所学过的知识的本质,促使知识正迁移;有助于学生形成良好的知识网络,能进一步优化数学认知结构;可以促进学灵活、创造性地进行学习;有助于师生真正从题海中解放出来,达到减负增效的效果。

参考文献:

- [1]张文娣.中学数学变式教学与能力培养[M].山东教育:2001(5):13-16
- [2]王生.如何提高二轮复习的有效性[J].2017(10):49-50

