

三位一体实施“冲激信号定义”教学

◆李文娟 周杰 李傲梅

(陆军炮兵防空兵学院 信息与通信工程教研室 安徽合肥 230031)

摘要:针对“信号与系统”课程中冲激信号的定义复杂难懂的特点,从工科学生的认知特点出发,通过物理现象、工程近似模型和严格数学定义三个维度由浅入深地分析冲激信号的三位一体特性,达到将抽象的定义具体化、系统化、实用化的目的。教学反馈表明,该方法有利于启发学生从形象思维到抽象思维的转变,使学生能够更加深入地理解所学知识,教学效果良好。

关键词:冲激信号;信号极限;狄拉克函数;广义函数

信号与系统课程是通信、信息相关专业的学科基础课程。在该课程中,冲激信号的作用至关重要,它既可以用来分解任意一个信号,又可以通过它的零状态响应做傅里叶变换或拉普拉斯变换得到系统的频率特性或系统函数^[1]。但是,在冲激信号知识点的教学过程中,学生普遍反映定义较抽象难懂,对不同定义方式之间的关系把握不清,从而导致对性质理解不透,影响了后续相关知识点的学习与掌握。

本文从冲激信号的物理现象案例引入,激发学生思考,并梳理冲激信号的不同定义之间的相互关系,分别从物理现象描述、工程近似模型分析和严格数学定义解释三个角度详细阐述冲激信号的定义,达到使学生能够全方位地深入理解冲激信号相关知识点的目的,在教学中起到了事半功倍的作用。

1 从物理现象到狄拉克函数定义

引入案例可以选择持续时间极短、取值极大的物理现象。本文以电磁弹射器弹射飞机的场景为例。电磁弹射器的特点为可以在极短的时间内释放出强大威力的电磁波,该电磁波可将重达几万公斤的战斗机弹射升空,因此该实例满足持续时间极短、取值极大的特点。另外,根据冲量的定义,可以得到

$$\int_0^t F dt = I \quad (1)$$

其中, F 为作用力, t 为作用时间, I 为冲量。对于确定的弹射现象, I 为常量,由此便可得出作用时间越短、作用力越大,并且积分有限的特性。这三个特性实际上就是狄拉克函数 $\delta(t)$ 所表示的含义,如式(2)、式(3)所示。

$$\begin{cases} \delta(t) = \infty, t = 0 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3)$$

式(2)表示的狄拉克函数的第一个条件含义比较直观,式(3)表示的第二个条件较难理解,教学时可在此处不去解释,而在讲解基于函数极限的冲激信号定义时再来解释这一条件。

在狄拉克函数定义的教学过程中,可以穿插有关科学怪才狄拉克的历史人文知识,使学生既能够通过学习前人的研究精神和思维方式提升自己的科学素养,又能够进一步理解狄拉克函数的提出背景和深刻含义。2009年,伦敦博物馆资深研究员格雷厄姆·法米罗出版了一本关于狄拉克的传记文学作品,书名中直呼这位科学天才为“最奇怪的人”。狄拉克常常具有令人费解的惊人思路的根本原因在与他是一个异乎寻常的“科学混血儿”。狄拉克身上有一部分是理论物理学家,有一部分是理论工程师,还有一部分是纯粹数学家。因此,他所提出的狄拉克函数,正好就是这种三位一体的科学技术理论的完美产物。这正验证了狄拉克本人所说的话:“一个数学理论如果是真正漂亮的话,她一定会显示为一种优雅而重要的物理现象。”狄拉克函数就是一种能够解释重要物理现象的数学理论,因此被誉为“最优美的函数”^[2]。

2 从工程近似模型到基于函数极限的定义

冲激信号作为解决实际问题的数学模型,在现实中是不存在

的,它是理想的数学模型,可以将其理解为规则函数的极限得到的数学模型^[3]。这里可以继续分析引课所用的实际案例,根据实际中的电磁弹射瞬间的冲击波形图说明理想与现实的差距,并指出通过化繁为简的思想解决现实中出现的实际问题的思维模式。

在基于函数极限的冲激信号定义教学中,可以采用动画的方式让学生直观地感受从规则函数到冲激信号的逼近过程。以脉冲函数的极限为例讲解比较直观,假设脉冲的宽度为 τ , 高度为 $1/\tau$, 可以得到关系式如式(4)所示。

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \right\} \quad (4)$$

脉冲面积固定为1保持不变,缩短脉宽,脉冲高度就会相应变高,当脉宽无限小趋于零时,脉冲高度趋于无穷大,此时得到的信号就是单位冲激信号 $\delta(t)$ 。这里的脉宽为零、脉冲高度无穷大就对应了式(2)所表示的狄拉克函数的第一个条件含义。而脉冲面积固定为1与式(3)所表示的积分为1含义相同。由此可以得出,基于狄拉克函数和基于信号极限的两种冲激信号定义方式含义是相吻合的,都是为了表示持续时间极短、取值极大和积分有限的含义。

需要强调的是,矩形脉冲在实际中也是无法实现的,实际中的信号往往更逼近于三角脉冲、双边指数脉冲、钟形脉冲、抽样函数等等^[4]。因此,根据这几类信号的极限同样可以得到冲激信号。这一部分可以作为知识拓展让学生课下讨论研究。

3 从严格数学理论到基于广义函数的定义

在工程应用中,掌握狄拉克函数定义和基于信号极限的定义方式基本已经够用。然而,从数学严密性来讲,这两种定义方式是存在数学漏洞的^[5]。

例如,考察信号 $\delta(t) + \delta'(t)$ 。显然,冲激偶信号 $\delta'(t)$ 包含正负极性的两个冲激信号,它不属于冲激信号的范畴,因此 $\delta(t) + \delta'(t)$ 自然也不是冲激信号。如果把 $\delta(t) + \delta'(t)$ 带入狄拉克函数的定义式,可以得到

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t) + \delta'(t)] dt = 1 \\ \delta(t) + \delta'(t) = 0 \quad (t \neq 0) \end{cases} \quad (5)$$

即 $\delta(t) + \delta'(t)$ 不是冲激信号,却满足狄拉克函数的定义。因此,狄拉克函数对冲激信号的定义是不严谨的,是存在数学漏洞的。

事实上,在狄拉克提出这种函数的时候,按照那时所形成的数学理论,是无法理解这种奇特的函数的。但正是这种看似奇特的函数,当它被参与数学运算后所得到的数学结论与物理结论确是正好吻合的。这就迫使理论学家们要为这类奇特的函数寻找严格的数学定义。后来,随着广义函数理论的发展,人们发现,对冲激信号比较严格的定义方式是基于广义函数的定义。广义函数 $g(t)$ 的定义如式(6)所示。

$$N_g[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t) dt \quad (6)$$

其中, $\phi(t)$ 为检验函数,广义函数 $g(t)$ 是对检验空间中的每个函数 $\phi(t)$ 赋予一个函数为 N 的映射。按照广义函数理论,冲激信号可这样定义:

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt \quad (7)$$

因此,冲激信号属于广义函数的一种。

这里,可利用式(7)的冲激信号定义方式考察信号 $\delta(t) + \delta'(t)$ 。由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t) + \delta'(t)]\phi(t) dt = \phi(0) - \phi'(0) \quad (8)$$

因此,根据广义函数的定义, $\delta(t) + \delta'(t)$ 不满足冲激信号的

定义。正因为基于广义函数的冲激信号定义具有严密的数学基础,可以由此得出冲激信号的一系列重要性质,式(7)所示的就是冲激信号的筛选性质。另外,还可以通过冲激信号的广义函数定义证明冲激信号的其他性质。

4 结语

冲激信号作为信号与系统课程中的一类重要的奇异信号,其应用贯穿了课程的始终。本文从实际物理现象、工程近似模型和严格数学理论三个角度说明了冲激信号的三位一体特性,并分别剖析了狄拉克函数定义、基于信号极限的定义和基于广义函数的定义三种定义方式,阐述了这三种定义方式之间的区别与联系,使学生能够更加深入地理解冲激信号,为后续冲激信号的性质及应用的学习夯实基础。

参考文献:

[1]杨忠林,欧阳华,侯新国,王家林.冲激函数教学方法

的初步探讨[J].课程教育研究,2016(13):34-37.

[2]陈关荣.狄拉克和他的 δ 函数[J].数学文化,2016(6):106-113.

[3]陈光红.《信号与系统》中冲激函数 $\delta(t)$ 的教学探讨[J].电脑知识与技术,2011(25):13-17.

[4]张盛峰,代少升,雷芳.信号与系统中单位冲激函数教学方法研究[J].大众科技,2013(11):174-176.

[5]徐斌.冲激函数匹配法在信号与系统教学中的应用研究[J].文理导航(下旬),2014(2):29-31.

作者简介:

1.李文娟,女,1985年2月出生,硕士,讲师,研究方向为信号与信息处理;

2.周杰,男,1979年9月出生,博士,讲师,研究方向为多源信息融合;

3.李傲梅,女,博士,教授,研究方向为信息与通信工程。

