ISSN:2705-0963（Print）　　ISBN:2705-0955（Online）

浅谈趣味设计微分概念教学

王　丹

成都航空职业技术学院　四川　成都　610100

摘 要：微分是高等数学课程的核心概念之一。但是在学习的过程中，学生往往只知道微分的计算公式，对于微分的概念不够理解。因此，本文提出了新的教学设计思路，从简单有趣的例子入手，探索导出微分概念的关键量，使学生能够轻松理解微分的概念，提升学习兴趣。

Abstract: Differentiation is one of the core concepts of advanced mathematics courses. However, in the process of learning, students often only know the calculation formula of differentiation, and they do not understand the concept of differentiation sufficiently. Therefore, this paper puts forward a new teaching design idea, starting from simple and interesting examples, exploring and deriving the key quantities of differential concepts, so that students can easily understand the concepts of differential and enhance their interest in learning.

关键词：微分；导数；教学设计

Keywords: Differentiation; Derivative; Teaching design

高等数学是支撑高职工科类专业相关课程的重要公共基础课程，同时也是培养学生自主学习和可持续发展能力的基本保障。微分是高等数学课程的核心概念之一，本文探讨了微分概念的教学。从简单有趣的例子入手，通过对比分析，让概念中的几个关键量自然地渗透到学生的思维中，使内容图像可视化，加深学生对概念本身的理解，这将有助于激发学生的学习兴趣，取得更好的教学效果。

一、引例

A：在单位圆外插入一个 10cm 长的红旗（沿半径方向），会形成更大的圆，那么与单位圆相比，周长增加了多少？

B：在地球赤道上插入一个 10cm 长的红旗，同样会形成更大的圆，与赤道线的长度相比，周长增加了多少？

（1）A 与 B 比较，谁的周长增加的更多？

直觉来看，许多学生可能认为 B 中的周长会增加的更多，因为地球赤道明显比单位圆大得多。但是通过计算就会发现事实并非如此：

$$\Delta L_1 = 2\pi\times(1+0.1) - 2\pi\times 1 = 0.2\pi,$$

$$\Delta L_2 = 2\pi\times(R+0.1) - 2\pi\times R = 0.2\pi.$$

根据结果可以发现，两个周长的改变量居然都等于0.2π。实际结果与直观感觉非常不同，值得深思。

为了探究其原因，可以引导学生作如下分析：

$$L = 2\pi R, \frac{dL}{dR} = 2\pi, \Delta L = 2\pi\times(R+\Delta R) - 2\pi\times R = 2\pi\times\Delta R。$$

可以看到，圆周的改变量正好等于周长对半径的导数乘以半径的改变量。A、B 两个问题的导数是相同的，都是0.2π，半径的改变量也是相同的，因此圆周的改变量必然是相同的，不要被想当然所蒙蔽。

（2）在 A 和 B 两种情况下，圆的面积改变了多少？

许多学生立即可以计算出情况 B 比情况 A 大得多：

$$\Delta S_1 = \pi(1+0.1)^2 - \pi\times 1^2 = 0.2\pi + 0.01\pi = 2\pi\times 0.1 + 0.01\pi$$

$$\Delta S_2 = \pi(R+0.1)^2 - \pi\times R^2 = 0.2R\pi + 0.01\pi = 2\pi R\times 0.1 + 0.01\pi$$

为什么周长的改变量相同，面积的改变量却相去甚远呢？这是因为地球的半径比单位圆的半径大很多。那么问题又出现了，周长的改变量为什么与半径无关，而面积的改变量就有关呢？

通过分析可以发现，面积变化量为$\Delta S = 2\pi R\Delta R + \pi\times\Delta R^2$，主变化量为$2\pi R\Delta R$，$\pi\times\Delta R^2$为$\Delta R$的高阶无穷小。一些细心的学生可能会发现，这个主要变化量也等于面积对半径的导数乘以半径的改变量（因为$S=\pi R^2, dS/dR = 2\pi R$）。而正是由于面积对半径的导数与半径有关，所以才会有周长的改变量与半径无关，而面积的改变量有关这种情况出现。

也就是说，计算改变量时，不管是周长的改变量，还是面积的主要改变量，都可以用函数对自变量的导数乘以自变量的改变量来表示。函数的改变量既与导数有关，又与自变量的改变量有关。由此可以引出微分的概念。

二，微分的概念和计算公式

函数 $y=f(x)$ 在 x 的邻域中定义，给出 x 的增量 Δx，则相应的函数增量可以表示为 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$。如果能找到常数 K（独立于 Δx，通常与 x 相关），使得 $\Delta y = K\Delta x + o(\Delta x)$，$\Delta x\to 0$，则 $K\Delta x$ 就是函数 $f(x)$ 的微分，也称为线性度函数，表示为 $dy = K\Delta x$ 或 $df(x) = K\Delta x$。当 Δx 很小时，函数的改变量可以大致用 $K\Delta x$ 代替，误差是 Δx 的高阶无穷小 $o(\Delta x)$。通过上面引例的分析可以知道，K 就是函数对自变量的导数。

当 $y = x$ 时，得到 $dy = dx = \Delta x$，因此微分公式通常使用 $df(x) = f'(x)dx$，这也反映了数学的内在对称性。利用这种表示法，可以找到另一层关系 $dy/dx = f'(x)$，因此导数也可以称为微商。它揭示了一元函数的导数与微分之间的等价关系。

ISSN:2705-0963（Print）　　ISBN:2705-0955（Online）

但也请注意，导数和微分是两个完全不同的概念。导数反映了某一点上函数的变化率，而微分代表了某一点上函数的主要变化，它们各自反映不同的量，每个都有自己的作用。

三，微分的应用

C：假设存在半径为 10cm 的球形西瓜，在其外面包上一层保鲜膜，其体积和质量会发生多少改变?

D：如果在地球表面包裹一层保鲜膜，则体积和质量可能会发生多少改变?

通过计算可知，体积的近似改变量为体积对半径的导数乘以半径的改变量，即 $\Delta V \approx 4\pi R^2 \Delta R$，质量的近似改变量就是体积的近似改变量乘以物体密度。对于 C，因为保鲜膜非常薄，所以 ΔR 非常小，并且西瓜半径只有 10cm，所以体积和质量的改变很小。但对于 D，由于地球的半径较大，所以此时的体积和质量改变较大。

通过进一步计算分析，可以得出一个有趣的结论：当球体的半径 R 增加 10% 时，体积将增加约 30%，这是因为 $\Delta y/y \approx dy/y = 4\pi R^2 \Delta R \Big/ \frac{4}{3}\pi R^3 = 3\Delta R/R = 30\%$。

同样，如果半径减少 10%，体积也减少约 30%，只留下原来的 70%。将这个抽象的数学概念融入日常生活中是非常有趣的。比如，买西瓜时为什么要买皮薄的? 因为如果西瓜皮足够厚，质量就基本上在西瓜皮上了。

四、结束语

本文主要通过生活中直观而有趣的例子引入了微分的概念，并进一步加强了学生对微分概念中两个关键量的理解，即函数对自变量的导数和自变量的改变量。逐步从学生已有的知识体系中发现新的内容，能使学生感到有趣、易懂。从浅到深学习数学知识的过程，显示出微分来自生活，也可以服务于生活的现实意义，让学生能够在心中植根微分的概念和思想，而不仅仅是记忆公式，死记硬背。

参考文献：

［1］高雪芬．一元微积分概念教学的设计研究［D］．上海：华东师范大学，2013

［2］邓凤茹，张文治．巧妙设计微分教学［J］．北华航天工业学院学报，2007，17（5）：38-39

［3］梁海滨．微分概念教学课堂设计探讨［J］．现代商贸工业，2013（21）：146-147

［4］周会玲．微分概念课的教学设计与课后反思［J］．科技创业家，2013（10）：180-181