Pisco Med Publishing
ISSN:2705-0963（Print） ISBN:2705-0955（Online）

创设“数形结合”情境　培养思维能力

王烽华

湖南省澧县第四中学　湖南　澧县　415500

摘　要：“数形结合”即是数学学科的重要思想，又是数学研究的常用方法。“数形结合”是求解数学问题的一种常用的思维方法。教师在教学中经常引导学生创设“数形结合”的情境，不仅可以沟通数与形的内在联系，把代数式的精确刻划与几何图形的直观描述有机地结合起来，力图在这种结合中，寻找到解题的思想与方法，同时又有利于开拓学生解题思路，发展学生形象思维能力。

关键词：数形结合　思维方法　形象思维能力

“数形结合”的方法一般来说可分为以下三种：

（1）将几何论证转化为代数计算的“解析法”；（2）利用数（式）来研究形的“以数（式）论形法”（3）利用形来研究数（式）的“以形促数（式）法”。

下面举例分别加以说明：

一、解析法：

例1：在正方形 OABC 中，$\angle DOA = 15°$ OD=OB 连接 DA。

求证：DA//BO

解：建立如图1所示的直角坐标系，设正方形的边长为1

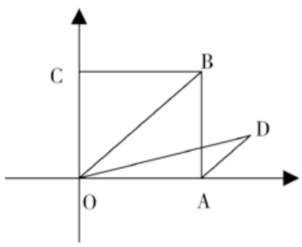

图 1

则 D、A 的坐标分别为（$\sqrt{2}\cos 15°$，$\sqrt{2}\sin 15°$），（1，0）

从而有 $K_{AD} = \dfrac{\sqrt{2}\sin15°}{(\sqrt{2}\cos15° - 1)} = \dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1} = 1$

又 $K_{OB} = 1$

$\therefore OA//OB$

总结评述：有些平面几何题用解析几何的工具证明较为方便，能发挥数形结合的优势。

二、以数论形法

例2：如图2一动圆 M 在定圆 $x^2+y^2=r^2$ 内且与定圆上半部以及 X 轴都相切，求圆心 M 的轨迹的方程。

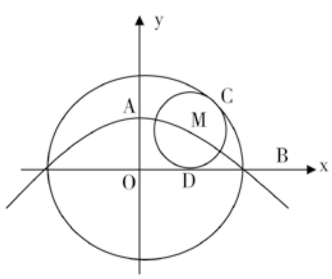

图 2

解：由几何条件（即形）易得如下等量关系（即数）

$|OM| = |OC| - |MC|$（⊙o 与⊙M 内切于 C）

$|MC| = |MD|$（⊙M 与 X 轴切与 D）

$|OM|^2 = |OD|^2 + |MD|^2$（ΔODM 为 RtΔ）

设圆心 M 的坐标为（x，y）于是有 $|OM| = r - y$

又 $|OM| = r - y$，$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = r - y$

∴ 平方整理得圆心 M 的轨迹方程是

$x^2 = -2r\left(y - \dfrac{r}{2}\right)$

总结评述：以数论形是解析几何侧重的手法，象本例这种求曲线（轨迹）方程的问题其思考方法就是几何条件解析化，即几何条件（形）——等量关系（数）——代数方程（式），它是求曲线方程的关键和困难之处。

三、以形促数法

例3：求函数 $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$ 最小值

分析：由题意可知，函数的定义域为 R，若从代数角度考虑，确实比较复杂；若借助两点间的距离公式，转化为几何问题，则非常容易解决

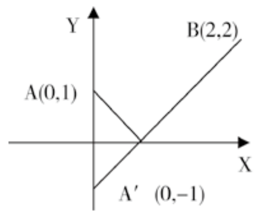

图 3

解：$y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$

$= \sqrt{x - 0\square^2 + 0 - 1\square^2} + \sqrt{x - 2\square^2 + 0 - 2\square^2}$

令　A（0，1）　，B（2，2），P（X，0）

则问题化为：在 X 轴求一点 P（X，0）使得 $|PA| + |PB|$ 取最小值

∵ A 关于 X 轴的对称点为 A′（0，-1）

$\therefore\ |PA| + |PB|\square_{\min} = |A'B| = \sqrt{2 - 0\square^2 + 2 + 1\square^2} = \sqrt{13}$

注：此题也可这样问：当 x 取何值时 $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$ 的值最小，X 的取值是直线 A′B 与 x 轴的交点横坐标。

ISSN:2705-0963（Print）　　ISBN:2705-0955（Online）

总结评述：代数问题几何化，问题变得容易解决。

例 4：若锐角 α、β、γ 满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

求证：$\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma\geq 2\sqrt{2}$

解：根据已知条件可设想一个如图 4 所示的长方体，使其对角线 A_1C 的长为 1 个单位，且与三条棱 a、b、c 分别交成 α、β、γ 角，

又 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$，$\tan\beta=\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}$，$\tan\gamma=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

由两个正数的的算术平均数不小于这两数的几何平均数的定理。

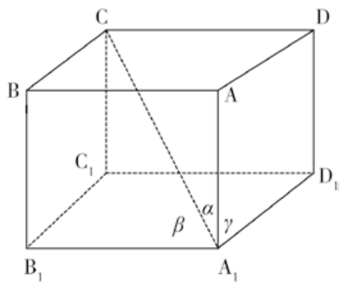

图 4

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}\circ\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}\circ\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\geq\frac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab}}{abc}=2\sqrt{2}$$

当且仅当“a=b=c”即长方体为正方体时取等号。

总结评述：对于三角问题学生往往只局限于三角知识解答，通过此题可以看出把三角问题恰当几何化，可以简化解题过程。

例 5：求函数 $f(\theta)=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta-1}$ 的最大值与最小值

分析：$f(\theta)=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta-1}$ 可以看成两点 P（$\cos\theta$，$\sin\theta$），A（2，1）连线的斜率，而 A 为定点，P 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点，因此，求数 $f(\theta)$ 的最值问题就转化为求直线 PA 的斜率的最值问题了

解：$f(\theta)$ 可以看成 P（$\cos\theta$，$\sin\theta$），A（2，1）两点连线的斜率，且 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，过定点 A 作圆的两条切线 AP_1，AP_2 则 AP_1 的斜率最小，且最小值为 0，AP_2 的斜率最大，下面求 AP_2 的斜率

设：AP_2 的斜率为 k，则直线 AP_2 的方程 $y-1=k(x-2)$ 即 $kx-y-2k+1=0$

$\because$ AB 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切

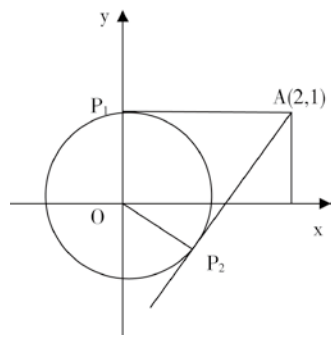

图 5

$\therefore$ 圆心到切线的距离为 $d=\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$

两边平方后并整理得 $3k^2-4k=0$

$\therefore$ $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$（其中 $k=0$ 是 AP_1 的斜率）

$\therefore$ AP_2 的斜率为 $\frac{4}{3}$

$\therefore f(\theta)_{max}=\frac{4}{3}$　　$f(\theta)_{min}=0$

总结评述：此题是属三角问题充分利用解析几何这一工具，使问题转化为容易计算的简单问题

总之，由于“数形结合”具有形象直观，易于接受等优点，且对于沟通知识间的联系，活跃课堂气氛，开阔学生思路，发展智能，提高数学水平有着独到的作用，所以，我们要积极挖掘教材中“数形结合”的例题与习题，注重引导学生动脑筋，设计确切的数学模型，创设“数形结合”的情境，多加强学生形象思维的训练，进而促进学生从形象思维到抽象思维的转化；这样，我们就一定能逐步提高学生的数学水平，把学生逐步培养成具有创造思维能力和开拓精神的创造型人才。