

高中生在学习函数中的常见错误及对策

潘巨军

贵州省三都民族中学 贵州 三都 558100

摘要: 函数是中学数学中的难点内容,也是重点内容,很多学生在高一时学不好,本文针对解题中的常见错误这一问题谈一点看法,希望我们的学生很快对函数在定义域、值域、单调性、周期性、奇偶性等方面的问题有一个正确的认识。

关键词: 定义域 值域 单调性 周期性。

有的学生在高考中,考不出好的成绩,并不是这些学生笨,而是因为题目太“狡猾”。题目中有很多的“陷阱”,使许多学生难以得出正确的结论。学生如果能够把会解的题都做对,成绩将会有很大提高。因此,很有必要研究一下学习的误区和错解原因。本文将讨论函数知识的学习误区和错解原因并提供对策。

一、求定义域和用定义域中的问题

许多同学在学习函数这一内容时,只注意记住函数的解析式,会运用函数的一些性质,对函数的三要素(定义、值域、解析式),只抓住一个要素,因此,在解题中错误百出。特别是定义域,在任何时候都不要忘记,否则,将出许多错误。所以在解函数题时一定要注意定义域,特别在解应用题时,定义域还与实际问题有关。有的同学只考虑解析式有意义的范围,这是不对的。

二、在求值域中的错误

例 1 求函数 $y = \frac{\sin x}{4\sin^2 x + 9}$ 的值域

错解: 令 $\sin x = t$, 则 $-1 \leq t \leq 1$

$$4yt^2 - t + 9y = 0, \quad (1)$$

关于 t 的方程 (1) 应有实数解, 得 $\Delta \geq 0$, 即 $(-1)^2 -$

$$4 \cdot 4y \cdot 9y \geq 0, \therefore -\frac{1}{12} \leq y \leq \frac{1}{12}.$$

原因分析: 应用 $\Delta \geq 0$ 只保证方程 (1) 在实数范围内有解, 而本题要求方程 (1) 是在 $[-1, 1]$ 内有解。上面解法忽略了 $-1 \leq t = \sin x \leq 1$ 。

正解: 令 $\sin x = t$, 则 $t \in [-1, 1]$, $4yt^2 - t + 9y = 0$.

当 $y = 0$ 时 $t = 0 \in [-1, 1]$;

$$\text{当 } y \neq 0 \text{ 时, } t^2 - \frac{1}{4y}t + \frac{9}{4} = 0 \quad (2)$$

设 $f(t) = t^2 - \frac{1}{4y}t + \frac{9}{4}$, 若在 $[-1, 1]$ 内有一解, 则

$$f(-1)f(1) \leq 0, \therefore -\frac{1}{13} \leq y \leq \frac{1}{13} \text{ 且 } y \neq 0; \text{ 若 (2) 在 } [-1,$$

$1]$ 有两解, 则 $\Delta \geq 0$, $f(-1) \geq 0$, $f(1) \geq 0$, 得 $y \in \varnothing$. 综

上所述 $-\frac{1}{13} \leq y \leq \frac{1}{13}$ 为求值域。

对策: 在初中经常说错的话是“某方程无解”正确的说法是“方程无实数解”, 在高中方程的解的情况常与范围有关, 特别是隐含的范围, 求值域若用判别式法, 要考虑方程在什么范围内有解。

三、判定函数奇偶性中的错误

例 2 判断函数 $f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ 的奇偶性

$$\text{错解: } \because f(x) = \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan$$

$\frac{x}{2}$, 而 $\tan \frac{x}{2}$ 是奇函数, $\therefore f(x)$ 是奇函数。

原因分析: 一个函数是奇函数还是偶函数的必要条件是定义域关于原点对称。若不对称, 则为非奇非偶函数。上题错解是因为: 一是不考虑定义域, 二是原函数与 $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ 不是同一函数。

正确解法: 由 $1 + \sin x + \cos x \neq 0$ 得 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } x \neq 2k\pi - \pi (k \in Z)\}$ 它不是关于原点对称的区间, 所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数

四、学习函数单调性中的错误

(1) 认识概念的误区: 误认为单调性一定在整个定义域内考虑, 实际上单调性是指定义域中某个区间内的性质, 这个区间可能是定义域, 也可能不是。所以在判定或证明单调性时要注意步骤, 也要注意区间, 有时要分成小区间讨论。

(2) 复合函数单调性的判定

例 3 求函数 $f(x) = \log_{0.5}(x^2 - 8x + 7)$ 的单调区间

错解: 令 $y = \log_{0.5} u$, $u = x^2 - 8x + 7$

因为 $y = \log_{0.5} u$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, $u = x^2 - 8x + 7$

在 $(-\infty, 4)$ 上是减函数, 在 $(4, +\infty)$ 是增函数。

所以函数 $f(x) = \log_{0.5}(x^2 - 8x + 7)$ 在 $(4, +\infty)$ 上是减函数, 在 $(-\infty, 4)$ 上是增函数

原因分析: 未注意 $u > 0$

正确解法: 由已知得 $x^2 - 8x + 7 > 0$: $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ 且 $u = x^2 - 8x + 7$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数, 在 $(7, +\infty)$ 上是增函数, 所以, 函数 $f(x) = \log_{0.5}(x^2 - 8x + 7)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是增函数, 在 $(7, +\infty)$ 是减函数。

对策: 求函数 $y = f[g(x)]$ 的单调性, 用“同增异减”规律进行判断, 特别注意函数 $y = f(u)$ 的定义域 M 与函数 $u = g(x)$ 的值域 D 之间的关系是 $D \subseteq M$ 。

参考文献:

[1] 全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修) 数学 人民教育出版社

[2] 《数学题组教学法的理论与实践》 张全信 编著 石油大学出版社

[3] 《2018 年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明》