ISSN:2705-0963（Print）　ISSN:2705-0955（Online）

依据数学学业质量研究习题教学

——函数导数一道课后习题的教学设计

朱　婧

贵阳第三实验中学　贵州　贵阳　550000

摘　要：学业质量是学生自主学习与评价、教师教学活动与评价、教材编写的指导性要求。基于新课程标准的理念，教师在日常教学活动设计中必须依据学业质量，落实数学学科核心素养。

关键词：依据数学学业质量；教学活动设计

Teaching according to the research problem of mathematics academic quality

——The teaching design of an after-class exercise on function derivatives

Zhu Jing

Guiyang No. 3 Experimental Middle School, Guizhou, Guiyang 550000

Abstract: Academic quality is a guiding requirement for students' autonomous learning and evaluation, teachers' teaching activities and evaluation, and textbook compilation. Based on the concept of the new curriculum standards, teachers must implement the core literacy of mathematics in the design of daily teaching activities based on academic quality.

Key words: according to the quality of mathematics study, the design of teaching activities

修订版课程标准的一个重大突破是研制了数学学业质量标准，学业质量是学生自主学习与评价、教师教学活动与评价、教材编写的指导性要求，也是相应考试命题的依据。高中数学学业质量分为三个水平，水平一是高中毕业的要求，水平二是高考要求，水平三是拓展性要求。这三个维度体现了数学活动的四个基本方面：情境与问题，知识与技能，思维与表达，交流与反思。

基于新课程标准的理念，教师在日常教学活动设计中必须依据学业质量，落实数学学科核心素养。下面笔者以一道教材中课后习题的教学为例，谈谈依据业学质量教学活动的设计。

高中数学教材“导数在研究函数中的应用”一节的课后习题：

1. 利用函数的单调性，证明下列不等式，并通过函数图象直观验证：

(1) $\sin x < x$，$x \in (0, \pi)$；　(2) $e^x > 1 + x$，$x \neq 0$；(3) $\ln x < x < e^x$，$x > 0$；

【教学活动设计一　分析问题】

教师引导学生分析一　我们对证明两个数或式的大小关系，通常有什么方法？

学生需分析出：比较数或式的大小关系常用做差比较法。

思路一　可考虑构造差函数。

此可达到学业质量水平一：能够体会运算法则的意义和作用，运用运算验证简单的数学结论。

教师引导学生分析二 我们对 $y = \sin x$ 和 $y = x$ 的值在形上有一定的分析，大家记得图象形状吗？能否分析出大小关系呢？

思路二 图像分析。学生应能画出 $y = \sin x$ 和 $y = x$ 的图象形状，但如果图象不够精确，无法准确的得到 $\sin x$ 与 x 的大小关系。

此可达到学业质量水平一：能够描述简单图形的位置关系和度量关系及其特有性质。

【教学活动设计二　解决问题】

教师引导学生解决差函数的函数值求解问题。

(1) $f(x) = x - \sin x$，$x \in (0, \pi)$

利用求导得 $f'(x) = 1 - \cos x > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增，由 $f(0) = 0$ 知 $f(x) > 0$ 即证不等式成立。

请同学们用此方法求解(2)(3)小题。

(2) $f(x) = e^x - (x + 1)$

利用求导得 $f'(x) = e^x - 1$，$f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上小于0，在 $(0, +\infty)$ 上大于0，即 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 有最小值 $f(0) = 0$，由 $x \neq 0$ 知 $f(x) > 0$ 即证不等式成立。

(3) $f(x) = e^x - x$，$g(x) = x - \ln x (x > 0)$

利用求导得 $f'(x) = e^x - 1$，$f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上小于0，在 $(0, +\infty)$ 上大于0，即 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 有最小值 $f(0) = 1$，故 $f(x) > 0$，即证不等式成立。

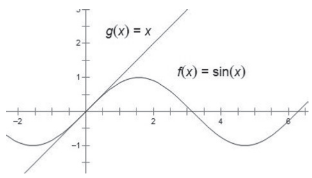
利用求导得 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} (x > 0)$，$g'(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上小于0，在 $(1, +\infty)$ 上大于0，即 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 有最小值 $f(1) = 1$，故 $g(x) > 0$，即证不等式成立。

ISSN:2705-0963（Print）　ISSN:2705-0955（Online）

可达学业水平二：能够理解数学命题的条件与结论，通过分析相关数学命题的条件与结论，探索论证的思路，选择合适的论证方法予以证明。

【教学活动设计三　思考问题】

教师引导学生思考从图形关系的角度可以怎样理解不等式关系？

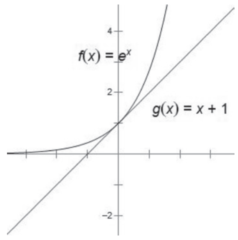


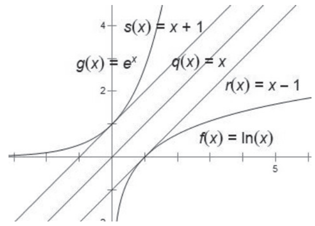
教师用电脑显示两个函数的图象关系，从形上理解不等关系 $\sin x < x$，$x \in (0, \pi)$ 成立。同时可从直线与曲线相切的位置关系分析不等关系。函数 $f(x) = \sin x$，$f'(x) = \cos x$，$f(x)$ 的曲线在点 $x = 0$ 处切线的斜率 $k = f'(0) = \cos 0 = 1$，切线方程即为 $y = x$。

请同学们用此方法思考(2)(3) 小题。

(2)$e^x > 1 + x$，$x \neq 0$

函数 $f(x) = e^x$，$f'(x) = e^x$，$f(x)$ 的曲线在点 $x = 0$ 处切线的斜率 $k = f'(0) = e^0 = 1$，切线方程为 $y - 1 = x$，即 $y = x + 1$，故有 $e^x \geqslant x + 1 > x$ 成立。





(3)$\ln x < x < e^x$，$x > 0$

函数 $f(x) = \ln x$，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$f(x)$ 的曲线在点 $x = 1$ 处切线的斜率 $k = f'(1) = 1$，切线方程为 $y - 0 = x - 1$，即 $y = x - 1$，故有 $x > x - 1 \geqslant \ln x$ 成立。

可达到学业质量水平二：能够掌握研究图形与图形、图形与数量之间关系的基本方法，借助图形性质探索数学规律，解决实际问题或数学问题。

学生可以从函数图像的角度重新审视一元二次不等式的解，建立不等式与函数的关联。

【教学活动设计四　变化问题】

教师引导学生将第(3) 小题中曲线除了可分析在点处的切线方程外，还可以分析过某点曲线的切线方程吗？

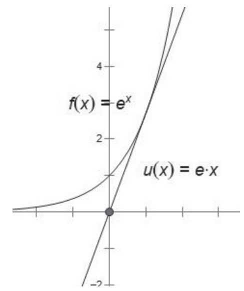
直线 $y = x + 1$ 为曲线 $y = e^x$ 在点(0，1) 处的切线。如果考虑曲线 $y = e^x$ 过点(0，0) 的切线呢？直线 $y = x + 1$ 为曲线 $y = e^x$ 在点(0，1) 处的切线。如果考虑曲线 $y = e^x$ 过点(0，0) 的切线呢？设切点为 (x_0, y_0)，$f'(x) = e^x$，由 $e^{x_0} = \dfrac{y_0 - 0}{x_0 - 0}$ 得 $e^{x_0} = \dfrac{e^{x_0}}{x_0} \Rightarrow x_0 = 1$，$k = e^1 = e$，故过点(0，0) 曲线 $y = e^x$ 的切线方程为 $y = ex$。

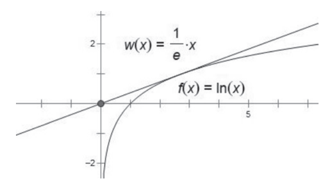
由学生完成求曲线 $f(x) = \ln x$ 过点(0，0) 的切线方程。

设切点为 (x_0, y_0)，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，由 $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{y_0 - 0}{x_0 - 0}$ 得 $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{\ln x_0}{x_0} \Rightarrow x_0 = e$，$k = \dfrac{1}{e}$，故过点(0，0) 曲线 $y = \ln x$ 的切线方程为 $y = \dfrac{1}{e}x$。

教师引导学生根据所求切线方程，接合曲线图像可得怎样的不等关系呢？

学生能得到：$e^x \geqslant ex$，$\ln x \leqslant \dfrac{1}{e}x$





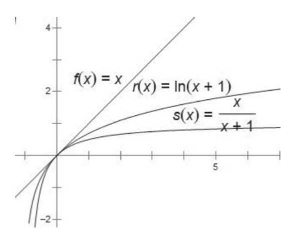
可达到学业水平质量二：能够想象并构建相应的几何图形，发现图形与图形、图形与数量的关系，探索图形的运动规律；能够用图形探索解决问题的思路，形成数形结合的思想；

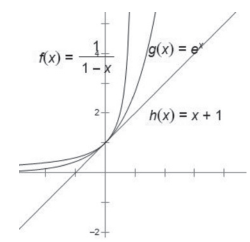
【教学活动设计五　拓展问题】

通过变换，可得到以下几个重要结论：

$x + 1 \leqslant e^x \leqslant \dfrac{1}{1 - x}(x < 1)$；$\dfrac{x}{1 + x} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x(x > -1)$

几何解释如下图所示。





可达到学业质量水平三：能够在综合的情境中，发现其中蕴含的数学关系，用数学的眼光找到合适的研究对象，用恰当的数学语言予以表达，并运用数学思维进行分析，提出数学问题。

数学学业质量本质上是对数学素养的评价标准，是不同阶段学生数学学科核心到集中表现。因此，数学学业质量必须成为日常教学的阶段性目标。教师的教学中无论是新课还是习题课，都依据学业质量水平精心设计教学活动，更能落实数学核心素养的培养。

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]．人民教育出版社，2018.

[2] 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) 解读[M]．高等教育出版社，2020

[3] 方亚斌．《一题一课源于课本的高考数学题赏析》(2018 年 4 月第 3 次印刷)[M]．浙江大学出版社.