ISSN:2705-0963（Print）　　ISSN:2705-0955（Online）



# 基于拉普拉斯变换实践应用的教学探究

姜　雄　张　宇

辽宁科技学院　辽宁　本溪　117004

**摘　要**：本文在学生了解拉普拉斯变换的基础上，在教学上培养学生如何运用拉普拉斯变换解决工程问题的方法，尤其在解决线性微分微分方程组及其边值问题上，更加注重简化其繁杂的变换形式。

**关键词**：拉普拉斯变换；线性微分方程；边值问题

# Teaching exploration based on the practical application of Laplace transform

Jiang Xiong　Zhang Yu

Liaoning Institute of Science and Technology，Benxi，Liaoning 117004

**Abstract**：In engineering mathematics，Laplace transform plays an important role，so its teaching is also more important.On the basis of students'understanding of Laplace transform，this paper trains students how to use Laplace transform to solve engineering problems in teaching，especially in solving linear differential and differential equations and their boundary value problems，and pays more attention to simplifying them.complex transformations.

**Key words**：Laplace transform，linear differential equation，boundary value problem

## 一、拉普拉斯变换应用的原理

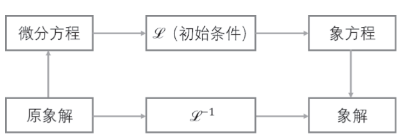
一个线性系统可以用一个线性微分方程描述。利用拉普拉斯变换的性质，可以将一个常系数微分方程问题转换成一个代数方程。解代数方程，然后再求拉普拉斯变换的逆变换，从而求到原方程的解。在教学中，可以总结出一般步骤：

（1）对关于 $y$ 的微分方程进行拉普拉斯变换，得到一个像函数 $Y(s)$ 的代数方程，

（2）解像函数 $Y(s)$ 的代数方程，得像函数 $Y(s)$，

（3）对 $Y(s)$ 作拉普拉斯变换的逆变换，得到微分方程 $y(t)$。

建立示意图如下：




## 二、拉普拉斯变换应用的几个方面教学

（一）解常系数线性微分方程

1. 带有初值的常系数线性微分问题

例 1 求 $y''(t)+4y(t)=0$，初始条件 $y(0)=-2, y'(0)=4$ 的特解。

解：设 $y(t)$ 的拉普拉斯变换为 $Y(s)$，对方程两边同时拉普拉斯变换得：$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=0$

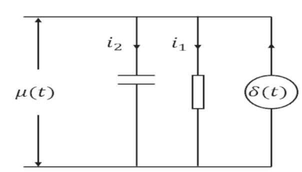
代入初始条件的：$s^2Y(s)+2s-4+4Y(s)=0$

解得：$Y(s)=\dfrac{4-2s}{s^2+4}=\dfrac{4}{s^2+4}-\dfrac{2s}{s^2+4}$

再取拉普拉斯变换的逆变换得：

$y(t)=2\sin 2t-2\cos 2t$

例 2　R，C 并联电路与电流为单脉冲函数 $\delta(t)$ 的电源接通（如下图）




设电容 C 上原来电压为 0，$\mu(0)=0$，求电压 $\mu(t)$

解：设流经电阻 R 与电容 C 的电流分别为 $I_1(t), I_2(t)$

则有 $I_1(t)=\dfrac{\mu(t)}{R}, I_2(t)=C\dfrac{d\mu(t)}{dt}$，

依题意 $\delta(t)=I_1(t)+I_2(t)$

于是得到电压所满足的微分方程：

$$\begin{cases} C\dfrac{d\mu(t)}{dt}+\dfrac{\mu(t)}{R}=\delta(t) \\ \mu(0)=0 \end{cases}$$

设 $\mu(t)$ 的拉普拉斯变换为 $U(s)$，两边同时取拉普拉斯变换：

$C[sU(s)-\mu(0)]+\dfrac{U(s)}{R}=1$，代入 $\mu(0)=0$ 得：$U=\dfrac{1}{C}\cdot\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}$

然后，两边取拉普拉斯变换的逆变换得：$\mu(t)=\dfrac{1}{C}e^{-\frac{1}{RC}}$

2. 带有边值常系数线性微分问题

拉普拉斯变换可以用于解线性微分方程的边值问题，未知初值由已知边值问题可求得。

例 3. 求 $y''-2y'+y=0$，满足 $y(0)=0, y(1)=2$ 的特解

解：方程两边同时取拉普拉斯变换得：

$s^2Y-sy(0)-y'(0)-2(sY-y(0))+Y=0$

代入 $y(0)=0$ 得：$Y=\dfrac{y'(0)}{(s-1)^2}$

对此式拉普拉斯变换逆变换得：

ISSN:2705-0963（Print）　ISSN:2705-0955（Online）

$y(1)=2$，可得：$y'(0)=2e^{-1}$.

因此得：$y(t)=2te^{t-1}$.

（二）解常系数线性微分方程组

拉普拉斯变换可以简化常系数线性微分方程组。

例4.求解方程组$\begin{cases} x'+y+z'=1 \\ x+y'+z=0 \\ y+4z'=0 \end{cases}$，且满足$x(0)=y(0)=z(0)$的解。

解：对每个方程组取拉普拉斯变换，得到像方程组：

$$\begin{cases} sX+Y+sZ=\dfrac{1}{s} \\ X+sY+Z=0 \\ Y+4sZ=0 \end{cases}$$

解这个方程组，并且整理得：

$$X=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{s^2-1}+\frac{1}{s^2}\right), Y=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-1}, Z=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2}\right)$$

再取拉普拉斯变换的逆变换的：

$$x(t)=\frac{1}{4}(3sht+t), y(t)=1-cht, z(t)=\frac{1}{4}(cht-t)$$

（三）解某些微分方程

例5、解方程$y(t)=\sin t-2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$

解：对方程两边取拉普拉斯变换，并且运用卷积定理得像函数方程：

$$Y=\frac{1}{s^2-1}-2Y\cdot\frac{s}{s^2+1} \quad 整理得：Y=\frac{1}{(s+1)^2}$$

再取拉普拉斯变换逆变换得：$y(t)=te^{-t}$

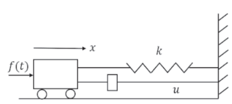
（四）求解线性系统的传递函数问题

所谓线性系统传递函数是指，当初始条件为零时，输出量的拉普拉斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比，即

$$w(s)=\frac{X_{出}(s)}{X_{入}(s)}$$

对于一个线性系统来讲，如果知道它的传递函数，用拉普拉斯变换就可以根据已知的输入量求出输出量。

例 6 求线性系统的传递函数，如下图所示




设$u,m,k$分别表示阻尼系数，质量，弹性系数。

它们是一致的系统参数，输入外干扰力 $f(t)$，输出是位移 x（t），求出传递函数。

解：依据牛顿第二定律可知：

$$ma=f(t)-kx-u\frac{dx}{dt} \quad 即mx''(t)+ux'(t)+kx=f(t)$$

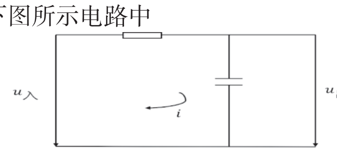
在初始条件为零时，即$x(0)=x'(0)=0$

对方程两边同时取拉普拉斯变换得：

$$ms^2X+usX+kX=F, 整理得：(ms^2+us+k)X=F$$

从而得传递函数：$G(s)=\dfrac{X(s)}{F(s)}=\dfrac{1}{ms^2+us+k}$

例 7 如下图所示电路中




（1）求这个电路的电压传递函数。

(2)当$u_{入}(t)=\begin{cases} h & 0\le t<\tau \\ 0 & \tau\le t \end{cases}$时，求$u_{出}(t)$

解：（1）由电学可知：

$$\begin{cases} u_{入}(t)=iR+\dfrac{1}{C}\int_0^t idt \\ u_{出}(t)=\dfrac{1}{C}\int_0^t idt \end{cases}$$

在初始条件为零时，对每个方程取拉普拉斯变换得像函数方程组：

$$\begin{cases} U_{入}=RI(s)+\dfrac{1}{Cs}I \\ U_{出}=\dfrac{1}{Cs}I \end{cases}$$

所以传递函数：$G(s)=\dfrac{U_{出}}{U_{入}}=\dfrac{1}{1+RCs}=\dfrac{1}{1+T_0s}$

（2）用单位跃阶函数$u(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\ge 0 \end{cases}$，将分段函数$u_{入}(t)$表示成解析式$u_{入}=hu(t)-hu(t-\tau)$

运用拉普拉斯变换得：$U_{入}=\dfrac{h}{s}-\dfrac{h}{s}e^{-s\tau}=\dfrac{h}{s}\left(1-e^{-s\tau}\right)$

由传递函数的关系式得：$U_{出}=G(s)\cdot U_{入}=\dfrac{1}{1+T_0s}\cdot\dfrac{h}{s}\left(1-e^{-s\tau}\right)$

取拉普拉斯变换逆变换并且根据位移的性质得：

$$u_{出}(t)=h\left[u(t)\left(1-e^{-\frac{t}{T_0}}\right)-u(t-\tau)\left(1-e^{-\frac{t-\tau}{T_0}}\right)\right]$$

$$=\begin{cases} h\left(1-e^{-\frac{t}{T_0}}\right) & 0\le t<\tau \\ h\left(e^{-\frac{t-\tau}{T_0}}-e^{-\frac{t}{T_0}}\right) & \tau\le t \end{cases}$$

## 三、结论

最后，由于拉普拉斯变换在工学中的作用十分重要，所以它的教学也尤为重要。通过例题的演示，我们简化了符号的运用，因此更容易理解和掌握。同时通过上述的例子，我们确定了拉普拉斯变换教学方向和教学目标。

本文为辽宁科技学院教学改革教改项目:《工科数学》教学改革实践教学与探究

作者简介：姜雄，男（1968-）辽宁本溪人，辽宁科技学院副教授，研究方向：高等数学教学与数学应用

## 参考文献：

[1]《复变函数与积分变换》编写组 复变函数与积分变换［M］北京：北京邮电大学出版社 2018

[2] 宋叔尼等 复变函数与积分变换［M］北京：科学出版社 2013