第一类曲面积分的计算方法探讨

潘全香

河南工学院　理学部　新乡　453000

【摘　要】针对第一类曲面积分这一难点，给出例子，针对曲面特点与被积函数的特点，提出三种常见的计算思路。

【关键词】第一类曲面积分；对称性；轮换对称性；元素法

Calculation Methods and Techniques on the First Curved Surface Integral

Quanxiang Pan

Henan Institute of Technology, Department of Science, Xinxiang, 453000

Abstract: Aiming at the difficulty of calculation of the first surface integrals, some examples are given. According to the characteristics of surface and integrand function, three common calculation ideas are put forward

Keywords: the first surface integral; Symmetry; Rotation symmetry; atomistic approach

在多元函数积分中，曲线积分和曲面积分的概念与计算是其重点也是难点，其概念容易混淆，计算方法也不统一，而且技巧性强。本文针对曲面积分的物理背景引入，指出在计算第一类曲面积分时，除了通过转化为二重积分的基本方法外，综合运用关于对称性、几何意义等知识，可以有效减少计算量，这里给出计算时需要注意的问题和其他一些计算方法和技巧[1]。

1.计算时尽可能的使用性质化简曲面积分计算

1)首先从物理起源看

定积分表示非均匀直线构件的质量；二重积分表示非均匀平面薄片构件的质量；三重积分表示非均匀空间有界物体的质量；第一类曲线积分表示非均匀曲线构件的质量；第一类曲面积分表示非均匀曲面构件的质量；这五类积分具有相同的物理背景，因此有相同的性质。除了定积分课本上明确提出来六条性质（线性、可加性、几何性、不等式、估值不等式、积分中值定理）及奇偶性，后面的四类积分还满足轮换对称性。因此,在做第一类曲面积分题目时首先考虑能不能利用第一类曲面积分的性质来化难为易、化繁为简。

首先考虑利用奇偶函数在对称曲面上的奇偶性简化计算，这里回顾一下奇偶性的内容：

如果第一类曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$中的被积函数$f(x,y,z)$关于某一个变量具有奇偶性，而积分曲面$\sum$关于另外两个变量所决定的坐标平面具有对称性，则可以考虑奇偶性：设曲面$\sum$关于xoy面对称，

$$\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\begin{cases}0, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是奇函数；}\\ 2\oiint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{是偶函数。}\end{cases}$$

其他类似的结果不再列出，具体例子如

例1：求曲面积分：

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS,\ \sum: x^2+y^2+z^2=a^2.$$

解：$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS\overset{\text{线性}}{=}\oiint\limits_{\Sigma}xdS+\oiint\limits_{\Sigma}ydS+\oiint\limits_{\Sigma}zdS$

$\overset{\text{轮换对称性}}{=}3\oiint\limits_{\Sigma}xdS\overset{\text{奇偶性}}{=}0.$

这里直接利用线性和奇偶性即可，轮换对称性的使用可用可无，再看下面的例2、3.

例2：计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}xe^y\sin z^2dS$，其中曲面$\sum$是球面$\sum=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=R^2\}$。

解：积分曲面球面$\sum=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=R^2\}$关于$yoz$面对称，被积函数关于$x$为奇函数，所以由对称性可知$I=\iint\limits_{\Sigma}xe^y\sin z^2dS=0$。

注：这个被积函数比肩复杂，不用奇偶性的计算无从下手。但如果积分曲面整体不满足关于坐标面的对称性，但是利用可加性可分为若干个积分曲面，而部分曲面具有对称性，且被积函数关于对应的变量具有奇偶性时，也可以在部分曲面上利用奇偶性化简。

例3：计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2ydS$，其中曲面$\sum$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面。

解：积分曲面$\sum=\sum_{\text{锥面}}+\sum_{\text{平面}}$整体不具有对称

性，但其中一部分锥面关于xoz面对称，被积函数关于y为奇函数，所以由对称性可知 $\iint\limits_{\Sigma_{锥面}} x^2 ydS = 0$，因此 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 ydS = \iint\limits_{\Sigma_{平面}} x^2 ydS$即可。

其次考虑利用轮换对称性简化计算，积分轮换对称性是指坐标的轮换对称性，简单来说就是将坐标轴重新命名，如果积分区间的函数表达不变，则被积函数中的x,y,z也同样作变化后，积分值保持不变。积分轮换对称性主要分为二重积分、三重积分、曲线积分、曲面积分。这里回顾一下第一型曲面积分轮换对称性的内容：

1) 设积分曲面∑关于x,y,z具有轮换对称性，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Sigma} f(z,x,y)dS = \iint\limits_{\Sigma} f(y,z,x)dS$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z) + f(z,x,y) + f(y,z,x)]dS$$

2) 注意到曲线积分和曲面积分中被积函数是定义在曲线和曲面上的，

因此常规计算曲面积分三步曲“一代二求三投影”的第一步强调的一代，即是将被积函数代入到曲线或者曲面的方程中[2]。在利用轮换对称性质时往往结合代入曲面方程，如

例4：$\oiint\limits_{\Sigma} x^2 dS, \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$

解：$\oiint\limits_{\Sigma} x^2 dS \overset{轮换对称性}{=} \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2 + z^2)dS \overset{一代}{=} \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} a^2 dS \overset{几何性}{=} \frac{4\pi a^4}{3}.$

这里轮换对称性的使用大大化简了计算，代入曲面方程，再结合几何性，此题计算再没有难点。

最后有的题目不能直接利用奇偶性，可以优先考虑做个变换再利用奇偶性，如

例5：$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2)dS, \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y + z).$

解：$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2)dS \overset{轮换对称性}{=} \frac{2}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2 + z^2)dS \overset{一代}{=} \frac{4}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(x + y + z)dS$

方法①：曲面方程化简为：$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3.$

做变换：$X = x-1, Y = y-1, Z = z-1,$

则曲面化简为：$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3.$

则原式 $\overset{代入}{=} \frac{4}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(X + Y + Z + 3)dS = \frac{4}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(X + Y + Z)dS + 4\oiint\limits_{\Sigma} 1dS = 48\pi.$

方法②：利用形心公式

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_{\Sigma} xdS}{A}, \bar{y} = \frac{\iint\limits_{\Sigma} ydS}{A}, \bar{z} = \frac{\iint\limits_{\Sigma} zdS}{A}.$$

这里球面的球心即是其形心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (1,1,1)$，面积是$A = 12\pi.$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma} xdS = A\bar{x} = 12\pi, \iint\limits_{\Sigma} ydS = A\bar{y} = 12\pi, \iint\limits_{\Sigma} zdS = A\bar{z} = 12\pi.$$

原式$= \frac{4}{3} \times 12\pi \times 3 = 48\pi.$

注：由于曲面不是关于三个坐标平面对称的，不能直接利用奇偶性。方法①做个变换后，曲面关于新的坐标平面是对称的，可以多次使用奇偶性和几何性，计算简单。而方法②利用了规则曲面的形心坐标，则体现了学以致用的思想，数学知识解决了物理问题，物理知识反过来又用于解决数学问题。

以上介绍的奇偶性和轮换对称性两个性质恰当及时的使用可以大大简化曲面积分的计算，但不能刻意追求性质的使用，而舍本逐末了，这里我们再总结一下第一类曲面积分的常规计算方法。将第一类曲面积分转化为二重积分的方法如下：

2.计算三步曲“一代二求三投影”

设曲面∑方程：$\Sigma: z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$.第一类曲面积分计算公式如下[3]：

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy.$$

教师可以让学生举一反三的写出曲面方程为其他形式 $\Sigma: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$或$\Sigma: y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$ 时对应的曲面积分公式：

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}dydz.$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}dxdz.$$

例6：$\oiint\limits_{\Sigma} xyzdS$, ∑由三个坐标曲面及平面$x + y + z = 1$所围成的四面体的整个边界曲面。

解：设四面体的四个面分别为：

$\Sigma_1: x = 0, \Sigma_2: y = 0, \Sigma_3: z = 0, \Sigma_4: x + y + z = 1.$

利用可加性，然后在第一步“一代”即发现坐标面上的曲面积分均为零。

所以原式

$$= \iint\limits_{\Sigma_4} xyzdS \overset{一代二求三投影}{=} \iint\limits_{D_{xy}} xy(1-x-y)\sqrt{3}dxdy = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

现在的教学改革多次强调教学内容要满足高阶性，比如此题可继续深挖：

例7：$\oiint\limits_{\Sigma}|xyz|dS, \Sigma$由方程$|x|+|y|+|z|=1$所表示的八面体的整个边界曲面。

解：由八面体关于三个坐标面均对称，利用奇偶性，并设曲面$\Sigma_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0.$

原式

$$=8\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS \overset{\text{一代二求三投影}}{=} 8\iint\limits_{D_{xy}} xy(1-x-y)\sqrt{3}dxdy=\frac{\sqrt{3}}{15}$$

此时再趁热打铁，补充两道考研真题。将考研题融入教学例子体现教育的高阶性，而且可以提高学生学习的积极性。

如下题是2007年数一第14题

例8：$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS, \Sigma:|x|+|y|+|z|=1.$

解：曲面由方程$|x|+|y|+|z|=1$所表示的八面体的整个边界曲面关于三个坐标面对称，因此，利用奇偶性，$\oiint\limits_{\Sigma} xdS=0$。

又显然曲面方程关于具有轮换对称性，因此有：

$$\oiint\limits_{\Sigma}|y|dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}1dS=\frac{8}{3}\iint\limits_{\Sigma_1}dS$$

$$=\frac{8}{3}\iint\limits_{D_1}\sqrt{3}dxdy=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

因此$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

再如下题是2012年数一真题：

例9：设曲面$\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1, x,y,z\geq 0\}$，则$\iint\limits_{\Sigma} y^2dS.$

解：常规三步曲“一代二求三投影”，

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_{xy}} y^2\sqrt{3}dxdy \overset{\text{先x后y简单}}{=} \sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} y^2dx=\frac{\sqrt{3}}{12}。$$

通过上面几道例子可以得出，在计算第一类曲面积分时，除了按照常规三步曲“一代二求三投影”将第一类曲面积分转化为二重积分的方法外，对于某些有特点的积分问题，结合下面三种方法往往可以使计算量大为降低：

（1）利用积分曲面的方程化简积分表达式（特别是积分曲面是平面的情形），如例4、7.

（2）利用积分曲面的（关于坐标面的）对称性及轮换对称性化简曲面积分，如例1、2、3、7、8利用的奇偶性，例4、5、6利用了轮换对称性。

（3）利用第一类曲面积分的几何意义，即前面提到的几何性（$\iint\limits_{\Sigma} dS$等于积分曲面的面积），例2、8最后一步利用了几何性。

3.柱面面积元素新求法

若曲面出现母线平行于z轴的圆柱面时，而被积函数中出现z，一代此时行不通。按照常规做法需要往xoz或者yoz平面上投影，常规方法计算麻烦[4]。此时可考虑换个计算面积元素的方法。

例8：$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS, \Sigma$为圆柱面$x^2+y^2=a^2$介于$z=0$与z=1之间的部分。

解：因为$z\in[0,1], dS=2\pi rdz=2\pi adz.$

$$\text{原式}\int_0^1\frac{1}{a^2+z^2}\bullet 2\pi adz=2\pi[\arctan\frac{z}{a}]_0^1=2\pi\arctan\frac{1}{a}.$$

4.小结：

遇到曲面积分的题目首先考虑能否用奇偶性、轮换对称性整体代入等性质，否则考虑常规的三步曲“一代二求三投影”，特别的，针对规则曲面不要忘了形心公式。如若曲面是柱面可考虑换换面积元素表达形式将曲面积分转化为定积分。

参考文献：

[1] 景慧丽，屈娜．第一类曲面积分的计算方法探讨[J].高等数学研究，2018, 21(2):19-22.

[2] 王静，李应岐，方晓峰．关于第一类曲面积分的计算方法和技巧[J].渭南师范学院学报，2014, 29(3):19-21.

[3] 同济大学应用数学系．高等数学（下）[M].第七版．北京：高等教育出版社，2014.

[4] 马菊侠，吴云天．高等数学题型归纳、方法点拨、考研辅导[M].北京：国防工业出版社，2010.336-339.

作者简介：潘全香（1980.7-），女，汉族，党员，博士，讲师，研究方向：微分几何。邮箱panquanxiang@hait.edu.cn