

微积分在经济学中的应用及 Matlab 的实现

曾 乔

三亚学院 海南 三亚 572000

【摘 要】：随着大数据和人工智能时代的到来，数学由原来的理论知识的研究演变为在相关领域的具体应用。数学是量化计算和分析的基础性工具，其高度的抽象性、严密的逻辑性又在培养理性思维、抽象概括、逻辑推理、空间想象以及分析问题、解决问题等方面发挥着重要作用。而微积分作为管理类专业的公共基础课，尤其是经济学这门学科的敲门砖，更是必不可少的专业工具。^[1]本文就通过相关经济学中的具体例子研究了微积分的应用，如求连续复利下的本利和、边际经济函数等方面的应用。并且通过借助 Matlab 软件更加直观地得到问题的相关结果。

【关键词】：极限；导数；定积分；经济学；Matlab

Application of calculus in economics and implementation of Metallica

Qiao Zeng

Sanya University Sanya Hainan 572000

Abstract:With the advent of the era of big data and artificial intelligence, mathematics has evolved from the original research of theoretical knowledge to the specific application in related fields. Mathematics is a basic tool for quantitative calculation and analysis, and its high degree of abstraction and rigorous logic play an important role in cultivating rational thinking, abstract generalization, logical reasoning, spatial imagination, and the ability to analyze and solve problems. Calculus, as a public basic course for management majors, especially the doorbuging of economics, is an indispensable professional tool. [1] In this paper, the application of calculus is studied through specific examples in related economics, such as the application of the intrinsic sum of interest and marginal economic functions under continuous compound interest. And with the help of Matlab software, the relevant results of the problem are more intuitively obtained.

Keywords: limits; derivatives; definite integrals; economics; Matlab

1 极限在经济学中的应用

设初始本金为 A_0 ，银行年利率为 r ，若以复利计息， t 年末 A_0 将增值到 A_t ，试计算 A_t 若一年 1 期计息一年末的本利和为 $A_1 = A_0(1+r)$ ，二年末的本利和为 $A_2 = A_0(1+r)^2$ ，依次类推， t 年末的本利和为 $A_t = A_0(1+r)^t$ 。

若仍以年利率为 r ，一年不是 1 期计息，而是分 n 期计息，且以 $\frac{r}{n}$ 为每期的利息来计算。在这种情况下，到 t 年共

结息 nt 次，则 t 年末的本利和为 $A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ 。上述计息的“期”是确定的时间间隔，因而一年计息次数为有限次。

若计息的“期”的时间间隔无限缩短，从而计息次数 $n \rightarrow \infty$ ，这种计息方式称为连续复利。由于

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r = A_0 e^{rt}$ ，所以，若以连续复利计算利息，则 t 年末本利和 A_t 连续复利公式是

$$A_t = A_0 e^{rt}.$$

2 导数在经济学中的应用

工程师用速度和加速度这样的术语称呼描述运动的函数的导数。对于变化率和导数，经济学家也使用特殊的词汇。它们把它们称为边际。

在制造业中，生产成本 $c(x)$ 是生产 x 件产品的函数。

边际生产成本是成本关于生产水平的变化率，也就是 $\frac{dc}{dx}$ 。它

以 $\frac{dc}{dx}$ 在 x 的值作为近似值。如果 $c(x)$ 的图形的斜率在接近 x 时不急剧改变，这个近似值是可以接受的。这时，差商将接近它的极限 $\frac{dc}{dx}$ ，这就是当 $\Delta x = 1$ 时在切线中出现的情况。

当 x 为非常大的值时，这个近似值的符合程度最佳。

经济学家通常用一个三次多项式

$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ 表示总成本函数, 其中 δ 代表固定成本, 像租金、暖气、设备投资和管理等的成本。其他项代表可变成本, 像原材料、纳税和劳务的成本, 固定成本同生产产品的数量无关, 而可变成本依赖于产品数量。三次多项式通常适于表达某个相关数量区间上的成本特性。

例 1:

为了获得对边际变化率这个术语的某种感受, 试考虑边际税率。如果边际所得税率为 28%, 而你的收入增加为 1000 美元, 预期你可能支付附加税 280 美元这并不意味着要把整个收入的 28% 用于纳税, 这只是表明在你的当前收入水平 I , 纳税额 T 相对于收入增加的比率是 $dT/dI = 0.28$ 。对于每多挣得的 1 美元将缴纳 0.28 美元的税, 自然, 如果挣的钱更多, 就可能进入更高的税级, 边际税率会增加。

3 定积分在经济学中的应用

3.1 由边际问题求总量函数

在定积分在经济学的应用中, 已知边际函数求总函数较为常见的问题。以下为总成本函数、总收益函数、总利润函数关于边际问题的积分表示:

总成本函数可以表示为

$$C(Q) = \int_0^Q C'(Q) dQ + C_0$$

总收益函数为

$$R(Q) = \int_0^Q R'(Q) dQ$$

总利润函数为

$$L(Q) = \int_0^Q L'(Q) dQ = \int_0^Q [R'(Q) - C'(Q)] dQ - C_0$$

例 2:

某工厂生产一款新型冰箱时的收入变换率为

$$R'(x) = 200 - \frac{x}{100}, \text{ 求}$$

- (1) 生产 50 个单位时的总收入;
- (2) 在生产 100 个单位的基础上, 生产量达到 200 时总收入的增量。

解: 生产 50 个单位的产品收入为

$$R = \int_0^{50} R'(x) dx = \int_0^{50} (200 - \frac{x}{100}) dx$$

在生产 100 个单位的基础上, 生产量达到 200 时总收入

的增量

$$R = \int_{100}^{200} R'(x) dx = \int_{100}^{200} (200 - \frac{x}{100}) dx$$

Matlab 命令为

```
syms x
j=int('200-x/100',x,0,50)
```

执行结果为

```
jf=
9987.5
```

Matlab 命令为

```
syms x
j=int('200-x/100',x,100,200)
```

执行结果为

```
jf=
19850
```

3.2 消费者剩余与生产者剩余问题

在日常的经济活动中, 商品的购买量和供给量受到诸多因素的影响, 如果不考虑价格以外的因素, 一般地, 当商品的价格上涨时, 出于人们的购物心理, 该商品的需求量减少。而当价格下降时, 需求量则增加。因此, 通常情况下从数学的角度出发, 将需求函数是关于价格的单调减少函数; 对于供给函数而言, 当价格下降时, 供应商愿意并能够提供的商品数量越少; 反之当价格越高, 厂商的供给越多。因此, 通常情况下供给函数是价格的单调增加函数。

这种规律可用供求曲线描述。

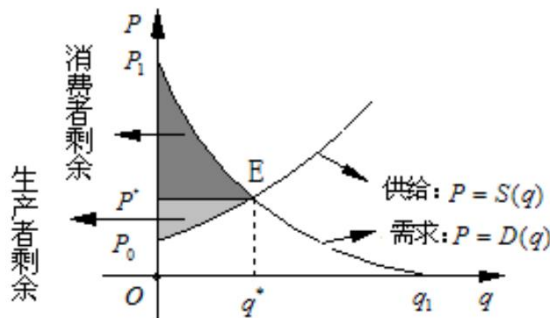


图 1: 供求曲线

下面介绍消费者剩余与生产者剩余的相关概念。

(1) 消费者剩余 (CS) [2]

消费者剩余衡量的是消费者从中得到的净利益。消费者剩余的变化反映消费者通过购买商品所感受到的净利益变化(福利的变化),它是评价消费者合意程度的指标。消费者剩余的概念有助于我们科学地评价经济政策的福利效果。生产者剩余为需求曲线与均衡价格之间的三角形区域面积。

由图 1 可知, 消费者剩余 $CS = \int_0^{q^*} (D(q) - p^*)dq$

(2) 生产者剩余 (PS) [2]

生产者剩余 (PS) 是指生产者出售一定量商品或服务实际获得的价钱与生产者可以接受的最低价钱之差, 是对生产者从交易中获得利益的一种货币度量。生产者剩余是衡量生产者净利益的指标。它为供给曲线与均衡价格之间的三角形区域面积。由图 1 可知, 生产者剩余 $PS = \int_0^{q^*} (p^* - S(q))dq$

例 3:

设需求函数 $D(q) = 8 - \frac{q}{3}$, 供给函数为 $S(q) = \frac{1}{2} - \frac{9q}{2}$,

求消费者剩余和生产者剩余。

解: 首先给出平衡价格和平衡数量 $8 - \frac{q}{3} = \frac{1}{2} - \frac{9q}{2}$, 即

$p^* = 15, q^* = 3$, 则

$$CS = \int_0^{q^*} (D(q) - p^*)dq = \int_0^3 (8 - \frac{q}{3} - 15)dq,$$

$$PS = \int_0^{q^*} (p^* - S(q))dq = \int_0^3 (15 - \frac{1}{2} + \frac{9q}{2})dq$$

3.3 投资应用

(1) 现金流量的现值

结合定积分的“微元法”设 $f(t)$ 为收入流, 在 $[0, T]$ 任一时间段内 $[t, t + dt]$ 的收入(或支出)为 $f(t)dt$, 若按年利率作连续复利的计算, 其现值为 $f(t)e^{-rt}dt$, 则在 $[0, T]$ 内收入

(或支出)的现值为 $P = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt$

(2) 现金流量的将来值[3]

若考虑在以后 $(T - t)$ 期间内若按年率 r 作连续复利计

息, 其将来值为 $f(t)e^{r(T-t)}dt$, 则在 $[0, T]$ 内收入(或支出)的将来值为 $B = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}dt$.

若收入流(或支出流)恒为一固定常数, 则称此为均匀收入流(或支出流)。

例 4:

求收入流为 1000(元/年) 在 20 年时间内的现值与将来值, 这里以 10% 的年利率连续复利方式赢取利息。

解: 据公式有现值

$$P = \int_0^{20} 1000 \cdot e^{-0.1t} dt = \frac{1000}{0.1} e^{-0.1t} \Big|_0^{20} \\ = 10000(1 - e^{-2}) \approx 8646.65(\text{元}).$$

将来值

$$P = \int_0^{20} 1000 \cdot e^{0.1(20-t)} dt = \frac{1000}{0.1} e^{0.1(20-t)} \Big|_0^{20} \\ = 10000(e^2 - 1) \approx 63890.56(\text{元}).$$

(3) 净投资与资本存量

设一个经济体的净投资流量函数为 $f(t)$, 一定时点的资本存量函数 $F(t)$, 其中 $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, 则从 a 时期到 b 时期净投资与资本存量之间的关系可用定积分表示为

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

例 5:

假设某人在时期 $t = 0$ 时拥有资本存量 8000 元, 排除资本折旧这个原因, 计划在未来 5 年以 $f(t) = 600t^2$ 的速度进行新资本投资, 试着给出从现在开始 5 年后的计划资本存量。

解: 由净投资与资本存量之间的关系, 有

$$F(5) - F(0) = \int_0^5 (600t^2)dt = 15000, \text{ 又 } F(0) = 8000, \text{ 则} \\ F(5) = 23000$$

在这个全球经济活动日益活跃的时代, 对于一些经济现象的分析和预测越来越多地应用数学知识。本文仅从微积分的角度浅析其在经济学中的应用, 对于概率论与数理统计这门学科而言, 它和经济学也是密切相关的。因此, 对一个企业或者个体而言, 熟练掌握数学的相关知识和软件的应用, 对于能逐步培养各种经济管理问题的抽象概括和建立模型、

用数学工具进行逻辑推理和空间想象等方面的能力都有很大的帮助。

参考文献:

- [1] 高鸿业.西方经济学(第四版)[M].北京:中国人民大学出版社,2007,8.
- [2] 易采桥,周露珠,于诗函.定积分在经济学中的应用[J].科技风,2018(03):34+42.
- [3] 许天慧.浅谈微积分思想及其在经济学中的应用[J].科技视界,2015(12):136+248.

作者简介: 曾乔 1990.01, 女, 汉, 海南海口, 讲师, 硕士, 研究方向: 函数论。