不同惯性参考系下的动能、功及动能定理

罗亿

（中国民用航空飞行学院　四川　德阳　618307）

摘要：本文从经典力学的观点出发，以牛顿定律为基础研究了不同惯性参考系下物体在低速宏观情况下的动能、功以及动能定理。为了简化所研究的问题，用物体的一维运动为例，证明了物体的动能、功以及动能定理与惯性参考系选取的依赖关系。结果表明低速运动物体的动能和功依赖于惯性参考系的选取，而动能定理在不同的惯性参考系中具有相同的形式。

关键字：惯性参考系；动能；功；动能定理

1、引言

在低速宏观范围内，物体的运动规律遵循牛顿三大定律。牛顿第一定律指出，力是物体运动状态发生改变的原因，从而表明任何物体都具有保持其运动状态不变的性质，这种性质被称为惯性，故牛顿第一定律又被称为惯性定律。而惯性定律成立的参考系，就是惯性参考系；相对于惯性参考系作匀速直线运动的参考系，也是惯性参考系[1]。牛顿第二定律指出，力是物体产生加速度的原因，而力与加速度是瞬时对应关系，当力在物体上作用一段距离，就会产生力对空间的累积作用，即力对物体做功。在经典力学中，力学相对性原理表明在不同的惯性参考系中牛顿力学的规律具有相同的形式，故在不同的惯性参考系中运动的物体同样遵循牛顿定律[2-3]。在两个具有相对运动的惯性参考系中，物体的动能和功是否相同呢？描述功与动能增量关系的动能定理是否具有相同的形式呢？为了简化所研究的问题，下面以牛顿定律为基础推导不同惯性参考系中物体做一维运动时的动能、功以及动能定理。

2、不同惯性参考系中的动能

动能是物体运动所具有的能量，用 E_k 表示，定义为物体质量 m 与速率平方 v^2 乘积的二分之一，定义式如下：

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

当物体低速（远小于光速）运动时，物体的质量 m 不依赖于速度 $\vec{v}$，故物体的质量 m 可视为常量[4]。在不同的惯性参考系中，物体具有相同的质量，下面以物体的一维运动为例证明不同惯性参考系中的动能是否相同。

如图 1 所示，在水平地面上有一辆做匀速直线运动的货车，速度为 $\vec{u}$。货车车厢顶部水平，在车厢顶部有一个质量为 m 的小球，该小球在合外力 $\vec{F}(t)$ 的作用下做变加速直线运动。合外力 $\vec{F}(t)$ 是随时间 t 变化的力。在 t_1 时刻，小球运动到车厢顶部的 A 点处，相对于货车的速度为 $\vec{v}_1$；在 t_2 时刻，小球运动到车厢顶部的 B 点处，相对于货车的速度为 $\vec{v}_2$。

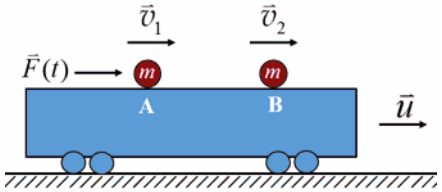

图 1　物体在不同惯性参考系中运动

货车为运动参考系，记为 S 系，小球在 t_1 和 t_2 时刻相对于货车的速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，根据动能的定义，小球在 t_1 和 t_2 时刻的动能分别为

$$E_{k1}=\frac{1}{2}mv_1^{\ 2} \qquad (2)$$

$$E_{k2}=\frac{1}{2}mv_2^{\ 2} \qquad (3)$$

地面为静止参考系，记为 S' 系，则小球在 t_1 和 t_2 时刻相对于地面的速度分别为

$$\vec{v}_1'=\vec{v}_1+\vec{u} \qquad (4)$$

$$\vec{v}_2'=\vec{v}_2+\vec{u} \qquad (5)$$

根据动能的定义，小球在 t_1 和 t_2 时刻的动能分别为

$$E_{k1}'=\frac{1}{2}mv_1'^{\,2}=\frac{1}{2}m(v_1+u)^2 \qquad (6)$$

$$E_{k2}'=\frac{1}{2}mv_2'^{\,2}=\frac{1}{2}m(v_2+u)^2 \qquad (7)$$

对比式（2）与式（6）以及式（3）与式（7）可知，在不同的惯性参考系中，小球在同一时刻具有不同的动能，这是由于在不同的惯性参考系中小球具有不同的运动速度。因此，动能依赖于惯性参考系的选取。

3、不同惯性参考系中的功

功是力对空间的累积作用，用 W 表示，定义为力与力方向上位移大小的乘积。如图 2 所示，质量为 m 的物体在变力 $\vec{F}$ 的作用下沿路径 PQ 运动，设作用在位移元 $\mathrm{d}\vec{r}$ 上的力 $\vec{F}$ 与位移元 $\mathrm{d}\vec{r}$ 之间的夹角为 θ。根据功的定义，力 $\vec{F}$ 所做的元功为

$$\mathrm{d}W=F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \qquad (8)$$

由于位移元 $\mathrm{d}\vec{r}$ 的大小与路程 ds 相等，即

$$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\mathrm{d}s \qquad (9)$$

因此物体在从 P 点运动到 Q 点的过程中，力 $\vec{F}$ 对物体所做的功为

$$W=\int\mathrm{d}W=\int_P^Q\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_P^Q F\cos\theta\mathrm{d}s \qquad (10)$$

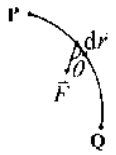

图 2　功的定义

物体在低速宏观情况下运动时，受到的作用力与惯性参考系的选取无关[1,5]。因此在不同的惯性参考系中，物体受到相同的作用力，下面仍以图 1 所示的系统为例证明不同惯性参考系中的功是否相同。

设在 dt 的时间间隔内，小球相对于货车的位移为 $\mathrm{d}\vec{r}$，路程为 $\mathrm{d}s$，则小球相对于地面的位移和路程分别为

$$\mathrm{d}\vec{r}'=\mathrm{d}\vec{r}+\vec{u}\mathrm{d}t \qquad (11)$$

$$\mathrm{d}s' = \mathrm{d}s + u\mathrm{d}t \quad (12)$$

因此，在运动参考系 S 系中，合外力 $\vec{F}(t)$ 在这段时间内所做的元功为

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\mathrm{d}s \quad (13)$$

在静止参考系 S' 系中，合外力 $\vec{F}(t)$ 在 dt 的时间间隔内所做的元功为

$$\mathrm{d}W' = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}' = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \vec{F}\cdot\vec{u}\mathrm{d}t \quad (14)$$

在宏观低速范围内，牛顿第二定律可表示为

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \quad (15)$$

因此，力在时间上的累积作用可表示为

$$\vec{F}\mathrm{d}t = m\mathrm{d}\vec{v} \quad (16)$$

将式（16）代入式（14）可得

$$\mathrm{d}W' = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \vec{F}\cdot\vec{u}\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + m\mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{u} \quad (17)$$

在**错误！未找到引用源。**所示的系统中，货车的速度 $\vec{u}$ 与速度增量 $\mathrm{d}\vec{v}$ 的方向相同，故式（17）可写成如下形式：

$$\mathrm{d}W' = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + m\mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{u} = \mathrm{d}W + mu\mathrm{d}v \quad (18)$$

对式（18）左右两边积分可得

$$W' = W + m(v_2 - v_1)u \quad (19)$$

因此，在不同的惯性参考系中，相同的时间间隔内合外力 $\vec{F}(t)$ 对小球所做的功不同，其差值为

$$W' - W = m(v_2 - v_1)u \quad (20)$$

这是由于做功与位移有关，而位移与惯性参考系的选取有关[6]。因此，功依赖于惯性参考系的选取。

4、不同惯性参考系中的动能定理

动能定理描述了功 W 与动能增量 ΔE_{k} 之间的关系，定义为合力对物体所做的功等于物体动能的增量[7]。以图 2 所示的系统为例，设质量为 m 的物体在 P 点的速度为 $\vec{v}_{\mathrm{P}}$，在 Q 点的速度为 $\vec{v}_{Q}$，则物体从 P 点运动到 Q 点的过程中，力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W_{\mathrm{PQ}} = E_{\mathrm{kQ}} - E_{\mathrm{kP}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{Q}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{P}}^2 \quad (21)$$

在经典力学范围内，物体在不同的惯性参考系中具有相同的质量，受到相同的作用力，但物体的位移和速度却是不同的，因此动能和功都依赖于惯性参考系的选取[7]，下面仍以图 1 所示的系统为例证明动能定理在不同的惯性参考系中是否具有相同的形式。

在运动参考系 S 系中，在 t_1 到 t_2 的时间间隔内，小球在力 $\vec{F}(t)$ 的作用下从 A 点运动到 B 点，小球在 A 点和 B 点相对于货车的速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，因此小球在 A 点和 B 点的动能分别如式（2）和式（3）所示，分别为 $E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}mv_1^{\,2}$ 和 $E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv_2^{\,2}$。在这段时间间隔内，小球的动能增量为

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k2}} - E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} \quad (22)$$

根据动能定理，力 $\vec{F}(t)$ 在这段时间间隔内所做的功为

$$W = \Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} \quad (23)$$

在静止参考系 S' 系中，小球在 t_1 和 t_2 时刻相对于地面的速度分别为 $\vec{v}_1'$ 和 $\vec{v}_2'$，速度 $\vec{v}_1'$ 与 $\vec{v}_1$ 之间的关系和速度 $\vec{v}_2'$ 与 $\vec{v}_2$ 之间的关系分别如式（4）和式（5）所示，分别为 $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 + \vec{u}$ 和 $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 + \vec{u}$，小球在 t_1 和 t_2 时刻的动能分别如式（6）和式（7）所示，分别为 $E_{\mathrm{k1}}' = \frac{1}{2}mv_1'^{2} = \frac{1}{2}m(v_1+u)^2$ 和 $E_{\mathrm{k2}}' = \frac{1}{2}mv_2'^{2} = \frac{1}{2}m(v_2+u)^2$。在这段时间间隔内，小球的动能增量为

$$\Delta E_{\mathrm{k}}' = E_{\mathrm{k2}}' - E_{\mathrm{k1}}' = \frac{1}{2}mv_2'^{2} - \frac{1}{2}mv_1'^{2} = \frac{1}{2}m(v_2+u)^2 - \frac{1}{2}m(v_1+u)^2 \quad (24)$$

由式（19）可知，力 $\vec{F}(t)$ 在这段时间间隔内所做的功为 $W' = W + m(v_2 - v_1)u$，将式（23）代入式（19）可得

$$W' = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} + m(v_2 - v_1)u = \frac{1}{2}m(v_2+u)^2 - \frac{1}{2}m(v_1+u)^2 \quad (25)$$

对比式（24）和式（25）可得

$$W' = \Delta E_{\mathrm{k}}' = \frac{1}{2}mv_2'^{2} - \frac{1}{2}mv_1'^{2} \quad (26)$$

对比式（23）与式（26）可知，在运动参考系 S 系和静止参考系 S' 系中，力 $\vec{F}(t)$ 所做的功均等于动能的增量，因此动能定理在不同的惯性参考系中具有相同的形式。

5、结论

在不同的惯性参考系中，动能和功依赖于惯性参考系的选取，因此动能和功都具有相对性。而动能定理在不同的惯性参考系中具有相同的形式，与惯性参考系的选取无关，因此动能定理的形式具有唯一性。以上结论虽然是以物体的一维运动为例得出的，但可将其推广到三维运动中。

参考文献

[1]郝超，吉梅. 动能定理与惯性参考系[J]. 技术物理教学, 2002,v.10;No.40(04):17−18.

[2]马文蔚. 物理学 (第六版) [M]. 高等教育出版社, 2015.

[3]冉婷，余杰，兰小刚. 惯性参考系的选择与机械能守恒[J]. 物理教学探讨, 2017,35(009):38−39.

[4]吉梅. 动能定理与惯性参考系的选取无关[J]. 上海电机技术高等专科学校学报, 2002,04(04):30−32.

[5]吴昊，马凯，解敏. 论经典力学中的参考系[J]. 力学与实践, 2018,040(003):319−322.

[6]崔健. 力在不同惯性系中的功[J]. 内蒙古民族大学学报, 2012(05):166−172.

[7]詹正桥. 动能定理中参考系的选取[J]. 物理教学, 2007,029(004):44.

[8]冯喜忠. 不同参考系中的功和动能定理[J]. 商丘师范学院学报, 2005(5):167−169.